heit herausarbeitete. Weiterhin konnte ich mich dann auf eine große Reihe wertvollster Untersuchungen beziehen.

Sehr wesentlich war dem Verfasser für eine intimere Kenntnis der Anwendungen der Mathematik auf die Wirklichkeit seine mehrjährige persönliche Beschäftigung mit der angewandten Mathematik und Geometrie während der Zeit, die er als Assistent für Mathematik und darstellende Geometrie an der technischen Hochschule in München (bei den Herren S. Finsterwalder und L. Burmester) zubrachte, wo er gleichzeitig eine mustergültige Behandlungsweise von Problemen der angewandten Mathematik und Geometrie vor Augen hatte.

Natürlich konnte im folgenden nicht die gesamte Literatur, welche die behandelten Fragen jemals streifte, behandelt werden. Die Anzahl der vortrefflichen Untersuchungen ist hier (von wissenschaftlicher und philosophischer Seite) eine solch unabsehbare, daß dies gar nicht beabsichtigt werden konnte. Jedoch wurden die dem Verfasser geläufigen und bekannt gewordenen Arbeiten (diejenigen also, welche die Gedankengänge des Verf. beeinflußt haben können) nach Möglichkeit vollzählig angeführt. Da die Arbeit schon im Frühjahr 1910 abgeschlossen wurde, konnten später mir zugänglich oder bekannt gewordene Arbeiten leider nicht mehr berücksichtigt werden. Dies gilt vor allem von dem ausgezeichneten Werke von Herrn A. Höfler „Didaktik des mathematischen Unterrichts" Leipzig 1910 sowie von der trefflichen Schrift von Herrn G. Mannoury, Privatdozent für die logischen Grundlagen der Mathematik an der Universität Amsterdam, „Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik" (bei P. Visser, Haarlem 1910).

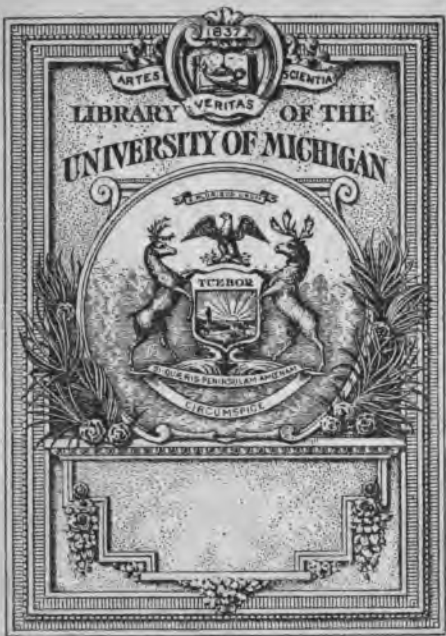
München, 24. Januar 1911.

Dr. Hugo Dingler.

## Berichtigung.

S. 2, Z. 17 u. 18 v. o. statt „sicherste ausgebildete exakte Wissenschaft“ lies: sicherlich ausgebildetste exakte Wissenschaft.

# Inhaltsverzeichnis.


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

# I. Kapitel: Das Problem.

## I. Abschnitt: Die Entwickelung des Problems.

### § 1. Die logische Seite der Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.

Der eigentliche Ausgangspunkt für die ausgedehnten Untersuchungen, welche über die Grundlagen der Geometrie bisher angestellt wurden, ist ein logischer. Schon den alten Griechen war es als wünschenswert erschienen, — aus Gründen, auf die wir jetzt nicht näher eingehen wollen, — das Parallelenpostulat des Euklid mittels der übrigen Euklidischen Axiome zu beweisen, es aus ihnen logisch abzuleiten. Dieses Problem, dessen Geschichte[1] mit am bekanntesten geworden ist von allen mathematischen Problemen, setzte allen Lösungsversuchen hartnäckigen Widerstand entgegen, bis ums Jahr 1697 Saccheri[2] darauf verfiel, statt immer wieder gegen die gleiche harte Mauer anzulaufen, sich einen anderen Ausweg zu suchen. Und dieser fand sich in der Frage, was denn herauskomme, wenn man den Parax[3] einmal als falsch voraussetze. Es wurde nachgewiesen, daß man ohne zunächst auf einen Widerstand zu stoßen, statt des Paraxes eine ihm widersprechende Annahme in die Geometrie einführen könne. Schließlich gelang es, innerhalb unserer gewohnten Geometrie und Analysis „logische Gebäude"[4] aufzuweisen, welche mit

[1] R. Bonola, Die nichteuklidische Geometrie, deutsch von H. Liebmann. Leipzig 1908.

[2] Bonola-Liebmann l. c. p. 24.

[3] Eine praktische Abkürzung des Wortes „Parallelenaxiom", auf die, soviel mir bekannt, Herr M. Simon die Aufmerksamkeit gelenkt hat.

[4] S. d. Aufsatz d. Verf.: Jahresber. d. d. Math. Vergg. 1905 „Zur Methodik in der Mathematik". (Im vorliegenden Falle könnte man unter Vorbehalt das Wort „Formelsystem" etwa dafür gebrauchen.)

denen der so entstehenden pathologischen, nichteuklidischen Geometrien identisch waren, und damit war folgender Satz bewiesen:

Das Parallelenaxiom des Euklid ist logisch unabhängig von den übrigen Axiomen des Euklid, kann also aus diesen nicht logisch abgeleitet werden.

Es folgt weiter daraus, daß jedes Axiomensystem, das den Parax aus sich zu beweisen gestattet, entweder explizit oder implizit einen oder (zusammengenommen) mehrere Sätze enthalten müsse, die dem Parax äquivalent sind.

Schließlich knüpften sich an diese Forschungen die bekannten, ebenfalls rein logisch formalen Untersuchungen der neueren Zeit, welche in Italien von Peano, in Deutschland von Hilbert ausgingen, und die ähnliche Forschungen, wie sie beim Parax so erfolgreich gewesen waren, nun auch auf die übrigen Axiome anwandten. Diese Untersuchungen, welche noch keineswegs ihren Abschluß gefunden zu haben scheinen, vermitteln uns so nach und nach eine immer eingehendere Kenntnis der gegenseitigen logischen Abhängigkeit der verschiedenen Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie.

Wir sagten, daß diese Untersuchungen rein formal logische sind. Am klarsten hat dies wohl zuerst der kritische Blick Hilberts erkannt, der sein ganzes Grundlagensystem, wie es in seinen „Grundlagen der Geometrie"[1] niedergelegt ist, als rein logisches Gebäude aufstellte. Dabei sind die Axiome erste Sätze, welche die Beziehungen festsetzen zwischen gewissen Termen, die, um das Lesen durch parallellaufende Vorstellung zu erleichtern, als „Gerade, Punkt usw." bezeichnet werden, die aber ebensogut durch A, B . . . oder andere Zeichen oder Worte (die nur keine bestimmte Bedeutung haben dürfen[2]) ersetzt werden könnten. Die

[1] 2. Aufl. Leipzig 1903. (Nach dieser wird im folgenden zitiert; unterdessen ist neuerdings bereits die dritte Auflage erschienen.)

[2] Diese Bemerkung in bezug auf Herrn Freges Einwurf gegen Herrn Hilbert, worin er sagt, daß seine Taschenuhr ein Punkt sei.

Forderung ist dann, aus diesen Axiomen alle weiteren Sätze ohne wesentliches Zurückgehen auf die Erfahrung, ja nötigenfalls durch reine rechnende Logik abzuleiten.

Mannigfache Beispiele aus anderen Teilen der Mathematik haben dann dazu geführt, zu beobachten, daß derartige rein logische Gebäude ganz heterogenen Gebieten angehören können, je nach der „Bedeutung", die man den an sich völlig bedeutungslosen Termen unterlegte[1], und diese Beobachtung hat dann auch weiter noch dazu geführt, daß diese logischen Gebäude sich völlig von dem empirischen Teile einer Wissenschaft loslösten und immer mehr als völlig selbständig existierend anerkannt wurden[2].

Unter Hinblick auf die zuletzt angeführten Tatsachen können wir schließlich das Hauptresultat der klassischen Untersuchungen über den Parax in der Weise aussprechen, daß wir sagen:

In dem rein logischen Gebäude, das die Euklidische Geometrie darstellt, ist derjenige Grundsatz, der als Parax bezeichnet wird, logisch unabhängig von den übrigen Grundsätzen, kann durch logische Operationen aus ihnen nicht abgeleitet werden. Es sind also andere logische Gebäude aufbaubar, welche die gleichen Grundsätze aufweisen wie die

---

Jahrber. d. d. math. Vergg. 12 (1903) S. 370. Siehe auch Kap. II, § 2 im folgenden.

[1] Es dürfen natürlich nur solche Begriffe als „Bedeutung" den Termen eines Axiomensystems untergelegt werden, welche gerade unter sich diejenigen Beziehungen aufweisen, welche das Axiomensystem enthält.

[2] Siehe auch die Ausführungen Wellsteins hierüber in „Enzyklopädie der Elementar-Mathematik" II. 2. Aufl. 1907, sowie im folgenden Kap. II, § 2, wo die Hauptlitteratur angeführt ist. Unter Verwertung der modernen logisch-mathematischen Untersuchungen Schröders und der Italiener hat dann der Verfasser diese Verhältnisse ausführlich behandelt in „Grundlinien einer Kritik und exakten Theorie der Wissenschaften insbesondere der mathematischen". München 1907. (Zitiert als „Grundlinien".)

Euklidische Geometrie, in denen an Stelle des Parax (wenn überhaupt einer) ein anderer Grundsatz eingeführt ist, der in logischem Widerspruche zum Parax steht.

## § 2. Die empirische Seite.

Im vorigen Paragraphen lag uns daran, das formal Logische an dem Problem und seiner Lösung möglichst klar herauszuschälen. Die dortselbst dargelegten Untersuchungen über das Parallelenaxiom zeitigten nun einige interessante und merkwürdige Problemstellungen, die uns sofort auffallen, wenn wir die Nebengedanken uns etwas betrachten, die bei einer großen Anzahl der beteiligten Forscher ihren Untersuchungen parallel liefen, oder sich an diese anschlossen. Der Umstand nämlich, daß bei Beginn dieser Forschungen jener Begriff, den wir im vorigen Paragraphen mit den Worten „logisches Gebäude" bezeichneten, noch fast gar nicht herausgearbeitet war, und sich noch gar nicht losgelöst hatte von der empirischen Interpretation eines logischen Gebäudes (so daß damals beide noch eine völlige Einheit bildeten und logische Gebäude nur in der Form einer „Wissenschaft von einem bestimmten Gegenstande" bekannt waren), dieser Umstand, sagen wir, bewirkte, daß diese Forscher der Überzeugung lebten, daß sie mit ihren Forschungen über das Parallelenaxiom unmittelbar an der wissenschaftlichen Untersuchung unseres empirischen Raumes tätig seien.

Es ist nun von hohem Interesse, und wäre wohl einer speziellen Darstellung wert, zu sehen, in welcher Weise diese Überzeugung beim einzelnen Forscher ihre Wirkung tat. Wie diese Überzeugung des näheren zustande kam, zeigen folgende Überlegungen.

Der Grund dafür, daß man immer wieder gerade das Parallelenaxiom zu beweisen suchte, und nicht auch die andern Axiome, war wohl der, daß dies Axiom nach der allgemeinen Anschauung dasjenige war, welches allein der „unmittelbaren Einsehbarkeit" entbehrte[1]. Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts herrschte nun die allgemeine Überzeugung, daß das Axiom sich beweisen lassen müsse, und diese wiederum stützte sich auf die Überzeugung, daß der Satz im empirischen Raume „richtig" sei. Man schloß also: Der Satz ist im empirischen Raume richtig, folglich muß er sich beweisen lassen. Dieser Schluß ist richtig unter der Voraussetzung, daß eben der Satz im empirischen Raume richtig ist, wenn wir feststellen, daß alles richtige sich beweisen läßt.

Ferner enthielt aber der obige Satz eine Einschränkung nicht, die in der Tat praktisch stets vorhanden war, das ist die, daß man glaubte, der Parax müsse sich mit Hilfe der übrigen Axiome des Euklid beweisen lassen. Jetzt sieht dann unser Schluß so aus: Der Satz ist im empirischen Raume richtig, folglich muß er sich mit Hilfe der übrigen Axiome des Euklid beweisen lassen. Und nun stellte sich heraus, daß der Satz sich in der Tat nicht mit Hilfe der Euklidischen Axiome beweisen lasse. Diese Beweismöglichkeit des Satzes fiel also fort; wäre sie erfolgreich gewesen, so hätte man geglaubt sicher zu sein, daß der Satz auch im empirischen Raume gilt. So aber tritt der Mangel seiner unmittelbaren Einsehbarkeit doppelt stark hervor, und man mußte sich sagen: Wir wissen nicht, ob der Satz gilt.

Hier gab es nun zwei Möglichkeiten: Entweder man war weiterhin der Überzeugung, daß der Satz im empirischen Raume gilt, dann mußte man nach neuen Beweismitteln suchen. Und was lag da näher, als durch die „Messung", durch das Experiment die Lösung zu versuchen? Andererseits kannte man aber auch zur Ansicht kommen, daß der Satz nicht gelte. Dann erhob sich die Frage, welcher Satz denn nun an seiner Stelle Geltung habe. Und die Antwort

[1] Beweis dafür neben direkten Äußerungen, daß vielfach nach einer dem Parax äquivalenten Form des Satzes gesucht wurde, welche die genannte Eigenschaft in höherem Maße aufwies; siehe z. B. Wallis u. a.

hierauf schien wiederum nur das Experiment bringen zu können. Wir stehen hier somit vor dem Ursprunge des Gedankens, daß das Parallelenaxiom durch Messung bewiesen werden müsse.

Aber es folgen noch mehr Konsequenzen. Wenn wir einmal zugegeben haben, daß wir nicht wissen, ob der Parax im wirklichen Raume gilt, so erhebt sich die Frage, unter wieviel Möglichkeiten haben wir dann zu wählen? Diese Frage präzisierte sich dadurch, daß man alle übrigen Axiome als im wirklichen Raume geltend annahm. Dann folgte zunächst, daß der Bereich, innerhalb dessen man zu wählen hatte, beschrieben werde durch die Gesamtheit derjenigen Sätze, welche ohne mit den übrigen Axiomen in Konflikt zu kommen, an Stelle des Parallelenaxioms gesetzt werden konnten. Man las und liest auch stellenweise heute noch, die so erhaltenen seien die nachgewiesenermaßen einzigen „logisch möglichen Geometrien". „Logisch möglich" sind nun Geometrien, soviel man will (siehe z. B. die Untersuchungen von Hilbert, Dehn u. a. m.), da logische Gebäude als solche gar nicht als „Geometrien" charakterisierbar sind. „Logisch möglich" ist eben jedes beliebige logische Gebäude. Würde man aber sagen, es seien die einzig möglichen empirischen Geometrien, so bedürfte es zunächst einer Feststellung, was das heißen soll. Legt man aber irgendeinen Sinn dem Ausdrucke unter, so müßte die entstehende auf die Wirklichkeit bezügliche Behauptung erst bewiesen werden, da bisher nur rein logische Sätze bewiesen wurden.

Die logischen Gebäude, die diesen Möglichkeiten entsprachen, wurden aufgestellt, und werden bis heute einer immer eingehenderen und genaueren Durcharbeitung unterzogen und ausgebaut, so daß wir heute eine ausgedehnte selbständige Literatur über diesen Gegenstand besitzen. So entstanden die gewöhnlichen Nichteuklidischen Geometrien, die wir mit F. Klein unter Einschluß der euklidischen als hyperbolische, parabolische und elliptische zusammenfassen wollen.

Neben dem Interesse an diesen logischen Gebäuden — den Beweis dafür, daß sie logisch einwandsfrei sind, haben wir im vorigen Paragraphen gestreift — entstand nun bei den Mathematikern aus den oben dargelegten Gründen immer wieder die Frage: Welche von diesen verschiedenen Geometrien gilt nun wirklich in unserem empirischen Raume? Und mit dieser Frage waren diese Forscher aus dem Bereiche der rein logischen, jeder Beziehung zur Wirklichkeit entbehrenden Konstruktion herausgetreten in den Bereich des Wirklichen, des Gebietes, auf welches die Logik erst angewandt werden muß, um eine wirkliche theoretische Wissenschaft zu erhalten.

Ehe wir uns nun im nächsten Paragraphen mit einigen Versuchen beschäftigen, die gemacht wurden, um die Frage zu entscheiden, sei es erlaubt, noch eine Bemerkung anzufügen. Es erhebt sich nämlich die Frage, ob es dem Mathematiker erlaubt war, sich mit dem genannten Probleme zu beschäftigen, ob er damit nicht sein eigenes Gebiet überschritt, und in eine fremde Domäne einzudringen versuchte. Diese Frage ist zunächst keine wissenschaftliche, sondern eine solche des Herkommens, der Konvention, des Taktes. Man kann sie aber sofort zu einer wissenschaftlichen machen, wenn man sagt: „Zum Gebiete des Mathematikers gehört von alters her die Geometrie. Ist diese Frage eine geometrische?“ oder noch exakter ausgedrückt: Ist die Geometrie nur ein leeres und der Beziehung zur Außenwelt völlig entbehrendes logisches Gebäude (unter unendlich vielen anderen), oder ist sie außerdem auch noch eine wirkliche theoretische Wissenschaft von einem bestimmten Gebiete unserer Welt, unserer Erfahrung, die berufen ist uns die theoretische und praktische (manuelle) Herrschaft auf diesem Gebiete zu verleihen? Die zweite dieser Fragen ist mit ja zu beantworten, und der Beweis dafür ist der, daß wenn die Geometrie die letztgenannte Aufgabe nicht hätte, man eben eine neue Wissenschaft brauchte, der dann diese Aufgabe zufiele, die aber außerdem die frühere Geometrie auch noch in sich enthielte. So ergibt sich denn, daß die Geometrie erst durch ihre Verbindung mit dem wirklichen Raume zu einer wirklichen Wissenschaft wird, und damit zugleich, daß die oben gestellte Frage, nach der Art der Geometrie, die in unserem Raume gilt, in der Tat eine eminent geometrische ist, wenn man sie nicht überhaupt als die erste Grundfrage der Geometrie betrachten will[1].

## § 3. Versuche, die Natur des Raumes festzustellen durch Messung.

Wir sahen, daß man sich das Problem stellte, welche von den im vorigen Paragraphen genannten Geometrien in unserem Raume wirklich gelte. Es entsteht die Frage, auf welchem Wege man eine Antwort auf diese Frage erhalten könne. Ein Gedanke zur Lösung war der, von dem wir schon sprachen: Durch Beobachtung, Messung im

[1] Die obigen Erwägungen bewegen sich in einer Richtung, welche in neuerer Zeit, wie es scheint, immer mehr zur Geltung kommt, und zwar hauptsächlich dort, wo auch die sog. angewandte Mathematik oder Geometrie ihre Berücksichtigung findet. Wie fruchtbar es ist, die Geometrie als eine echte Naturwissenschaft in dem Sinne zu betrachten, als sie uns zur Beherrschung wirklicher Verhältnisse verhelfen soll, zeigen die Arbeiten einer Reihe von Forschern (Finsterwalder, Prandtl u. a. m.). Schon früher und seither stets hat Herr F. Klein für die genannte Auffassung gewirkt und sie als die seinige hervorgehoben. Wir möchten hierfür nur die folgende Stelle anführen: (s. „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen", Erlanger Programm 1872, S. 42, Noten No. III) „Es gibt eine eigentliche Geometrie, die nicht, wie die im Texte besprochenen Untersuchungen nur eine veranschaulichte Form abstrakter Untersuchungen sein will. In ihr gilt es, die räumlichen Figuren nach ihrer vollen gestaltlichen Wirklichkeit aufzufassen und (was die mathematische Seite ist) die für sie geltenden Beziehungen als evidente Folgen der Grundsätze räumlicher Anschauung zu verstehen. Ein Modell, mag es nun ausgeführt und angeschaut oder nur lebhaft vorgestellt sein — ist für diese Geometrie nicht ein Mittel zum Zwecke sondern die Sache selbst".

wirklichen Raume die Frage zur Entscheidung zu bringen[1].

Zuerst war es wohl Gauß, der diesen Gedanken faßte und ihn auch praktisch zur Ausführung brachte[2], war ja doch auch er der erste gewesen, der von der Geltung des Parallelenaxioms nicht mehr absolut überzeugt war. Gauß prüfte die Winkelsumme geodätisch gemessener Dreiecke (speziell des Dreiecks Brocken, Hoher Hagen, Inselsberg mit den Seitenlängen von 69, 85, 197 km) auf ihre Abweichung von 180°. Lobatschefsky hatte den Gedanken, astronomische Messungen zu verwenden.

Da empirische Messungen niemals mit absoluter Genauigkeit ausgeführt werden können, so war von vornherein klar, daß ein absoluter Entscheid auf diesem Wege nie zu erhalten war. Bei allen diesen Messungen stellte sich heraus, daß bei Berücksichtigung aller Vorsichtsmaßregeln die auftretenden Fehler innerhalb der Grenzen der Meßgenauigkeit blieben. Man berechnete ferner, wie weit die Geometrie des Raumes von der Euklidischen abweichen dürfe, damit diese Abweichungen noch unter die bisher erreichte Meßgenauigkeit fielen. Man gelangte so zu dem häufig ausgesprochenen Erfahrungssatze: daß in unserem Raume die Euklidische Geometrie innerhalb der momentanen Messungsgenauigkeit gelte, wobei darauf hingewiesen wurde, daß die gleichen empirischen Messungen sich ebensogut durch eine der nichteuklidischen Geometrien interpretieren lassen, wenn deren Krümmungsmaß nur genügend wenig vom Euklidischen abweiche.

Sehr häufig wurde der Schluß gemacht: Wir wissen, daß der Parax nicht durch die übrigen Axiome bewiesen werden kann, folglich kann seine Geltung nur durch Messung fest-

---

[1] Siehe die Zusammenstellung hierüber in H. Liebmann, „Nichteuklidische Geometrie", Sammlung Schubert 1905, wo auch einige Literatur. (Hier auch die interessanten Berechnungen K. Schwarzschilds Vierteljahrsschr. astron. Ges. Bd. 35 zu beachten).

[2] Siehe Werke Bd. VIII S. 267.

gestellt werden. Dieser Schluß setzt jedoch voraus, daß bewiesen ist, daß es keinen anderen Weg zu dieser Feststellung gebe. Dieser Beweis wurde jedoch nicht erbracht.

Poincaré war meines Wissens wohl der erste Mathematiker, der auf die Unmöglichkeit durch Messung unser Problem zu lösen ausdrücklich hinwies, und wohl überhaupt der erste Forscher, der brauchbare Gründe hierfür vorbrachte. Aber auch er konnte keine definitive Antwort darauf geben, ob und warum wir gezwungen seien, die Euklidische Geometrie als die geltende zu betrachten. Eingehender werden wir hierauf, sowie auf andere Methoden, das Problem in Angriff nehmen, im III. Abschnitte dieses Kapitels und noch späterhin einzugehen haben.

Nachdem wir so in diesem Abschnitte einen kurzen Überblick über das Gesamtproblem der „Grundlagen der Geometrie" uns verschafften, wollen wir uns nunmehr der spezielleren Frage nach dem Zusammenhange der Geometrie mit der Wirklichkeit zuwenden.

---

## II. Abschnitt: Von der Ebene, der Geraden und dem starren Körper.

### § 4. Die empirische Geometrie.

Wenn wir auch im letzten Paragraphen des vorigen Abschnittes zur Erkenntnis kamen, daß es sehr wenig aussichtsreich sei, durch Messung die Beschaffenheit unseres Raumes festzustellen, so werden wir doch, wenn wir weiteren Aufschluß über unseren empirischen Raum erhalten wollen, uns zunächst einmal wirklich mit ihm beschäftigen müssen. Wir sahen vorhin, daß die Mathematik durch ihre Forschungen über die Grundlagen der Geometrie sich veranlaßt sah, sich mit dem empirischen Raume zu beschäftigen; aber dieser Anlaß wird vergleichsweise ganz unbedeutend, wenn wir uns nach sonstigen Gelegenheiten umsehen, wo die Mathematik mit dem empirischen Raume zu tun hat.

Dies tritt nämlich ein, sobald der Mathematiker zeichnende Geometrie betreibt, sobald er Modelle verfertigt, sich mit Mechanik beschäftigt. In allen diesen Fällen arbeiten wir wirklich praktisch und manuell im empirischen Raume. So wie der Physiker oder Chemiker mit empirischen Mitteln Apparate und Anordnungen herstellt, an denen etwas bestimmtes wahrzunehmen ist, und dadurch seine Herrschaft über diese Gebiete der Außenwelt dokumentiert, und seine Ideen verwirklicht und materialisiert, genau so arbeitet in diesen Fällen der Mathematiker oder speziell der Geometer. Und ebenso, wie der Physiker in einem gut durchforschten Gebiete schließlich Übereinstimmung des empirischen Resultates mit seinen theoretischen Vorüberlegungen und Kalkulationen erwartet, so, und noch in höherem Maße tut das gleiche der Geometer. Erst wenn dieser Standpunkt in seiner vollen Idealität erreicht ist, wenn in allen Fällen bei genauer Beobachtung aller Kautelen das empirische Resultat innerhalb der Größe der Beobachtungsfehler übereinstimmt mit der theoretischen Voraussage, ja, wenn diese Übereinstimmung stets eine um so genauere wird, je sorgfältiger wir alle Umstände beachten, — erst, wenn dies der Fall ist, kann von einer wirklichen Beherrschung eines empirischen Gebietes gesprochen werden.

Diese Bemerkungen sollen hinweisen auf einen eminent wichtigen Zusammenhang, der gerade in der Geometrie, wie uns scheint, bisher ungebührlich vernachlässigt wurde, nämlich auf den Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung.

Worin besteht dieser Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung in der Geometrie?

Wir haben vorhin gesehen, daß das logische Gebäude der Geometrie ohne Rückgang auf die Erfahrung aufgebaut wird.

Im Verlaufe dieses Aufbaues hat also die Erfahrung keine Gelegenheit einzugreifen. Aber irgendwo beim Aufbau muß doch ein solcher Eingriff geschehen, um eben dem logischen Gebäude den Charakter der Geometrie aufzuprägen, sonst könnte ja ebensogut jedes beliebige andere logische Gebäude bei unserem Aufbau zustande kommen. Diese Stelle des Eingreifens der Wirklichkeit kann also nur der Anfang des logischen Gebäudes sein. Überlegen wir weiter, daß durch Angabe aller Axiome das ganze logische Gebäude bereits völlig bestimmt ist, und zu seinem weiteren Aufbau nur mehr der Logik bedarf, so erkennen wir, daß der Nabelpunkt, an dem das logische Gebäude der Geometrie mit der Wirklichkeit verknüpft ist, sein Axiomensystem ist. Wir können also sagen:

Das Axiomensystem ist der einzige Bestandteil des logischen Gebäudes der Geometrie, der auf irgendeine Weise direkt mit der Wirklichkeit verknüpft sein muß.

Wir haben nun aber oben gesehen, daß die Geometrie keineswegs nur ein logisches Gebäude sein soll, sondern eine theoretische Wissenschaft vom wirklichen Raume. Und diese Tatsache führt uns auf eine mindestens ebenso wichtige, aber fast gar nicht behandelte Frage:

Worin besteht der Zusammenhang zwischen dem gesamten Gebäude der Geometrie und der Wirklichkeit; oder besser, warum und wie weit stimmt irgendein aus den Axiomen erschlossener beliebig verwickelter geometrischer Satz bei seiner Anwendung auf die Wirklichkeit mit dieser überein?

Suchen wir zunächst über den Zusammenhang zwischen den Axiomen und der Wirklichkeit etwas klarer zu werden.

Betrachten wir die Axiome des Euklidischen Aufbaues der Geometrie (oder des Hilbertschen), so sehen wir, daß sie gewisse Begriffe (Gerade, Punkt usw.) enthalten, die durch gewisse Beziehungen (schneiden, enthalten sein in, usw.) zu deren Ausdruck eben die Axiome dienen, verknüpft sind. Betrachten wir so einmal die Begriffe: Punkt, Gerade, Ebene. Dann besteht der Zusammenhang des logischen Gebäudes der Geometrie mit der Erfahrung darin, daß wir in der Wirklichkeit gewisse Dinge haben, die wir Punkt, Gerade usw. nennen, und von denen wir überzeugt sind, daß sie diejenigen Beziehungen untereinander besitzen, welche die Axiome aussagen. Aber welcherlei Dinge sind das? wo findet man sie? Man kann darüber den verschiedensten Behauptungen begegnen, welche deutlich zeigen, daß es an einer exakten Lösung dieser Frage völlig mangelt. Bevor wir uns jedoch mit dem Beispiele der Geraden etwas näher beschäftigen, seien einige Festsetzungen bezüglich der Ausdrucksweise getroffen.

Wir wollen künftig einen scharfen Unterschied machen zwischen einem „logischen Begriff", d. h. einem bestimmten Terme in einem bestimmten logischen Gebäude, der, wie wir sahen, gar keine bestimmte Bedeutung hat und zu haben braucht — und einem „wirklichen Ding", dem wir denselben Namen geben, wie dem logischen Term, und das tatsächlich oder vermeintlich die von dem logischen ausgesagten Eigenschaften (Beziehungen) aufweist. Den ersten wollen wir den „logischen Begriff" nennen, z. B. die „logische Gerade", das zweite wollen wir als den „wirklichen Gegenstand" bezeichnen, z. B. eine „wirkliche Gerade". Im ersten Falle gibt es nur einen einzigen „logischen Begriff", während es unzählige solche „wirkliche Gegenstände" geben kann.

Wenden wir uns nun zur wirklichen Geraden, und fragen, was das für ein Ding sei. Wir hören da z. B. die wirkliche Gerade sei ein gespannter Faden (etwa eines Lotes). Nun sollen aber doch alle Geraden kongruent sein. Wer sagt nun aber, daß diese gespannten Fäden alle kongruent sind? Wir müßten also irgendwo eine unveränderliche (starre) Normalgerade deponieren (ähnlich dem mètre des archives in Sèvres bei Paris), mit der alle übrigen verglichen werden müßten. Es käme dann also alles auf die „Geradheit" dieser Normalgeraden an. Welche Gerade sollen wir aber zur

Normalgeraden wählen, welche ist die geradeste? Soll die Prüfung durch Visieren geschehen, so fragen wir, welcher Lichtstrahl ist der geradeste? Diese Methode der Definition der wirklichen Geraden könnte man als die „passive" bezeichnen: sie wartet, bis sich ihr irgendwo eine Linie bietet, von der sie glaubt, sie als Gerade ansprechen zu dürfen. Nun können wir aber doch die allerverschiedensten Linien herstellen. Warum versuchen wir es nicht einmal mit einer aktiven Definition, und stellen uns die Aufgabe: Es ist eine Linie so herzustellen, daß sie eine Gerade wird. Dazu müssen wir aber wissen, wie eine Gerade aussieht, und unsere Methode, die wirkliche Gerade herzustellen, muß so beschaffen sein, daß aus ihrer Anwendung unmittelbar hervorgeht, daß die entstehende Linie tatsächlich eine Gerade wird, sie muß also gewissermaßen die Definition der Geraden enthalten. Wir werden dann, indem wir diese Methode anwenden, der erzeugten Linie die gewünschten Eigenschaften der Geraden aufprägen.

Diese vorbereitenden Andeutungen werden erst bei der systematischen Untersuchung im 2. und 3. Kapitel ihre volle Gestalt gewinnen. Im folgenden Paragraphen werden wir eine solche Methode, wie wir sie verlangen, angeben, doch wird sich der Beweis dafür, daß diese tatsächlich alles Verlangte leistet, erst im weiteren Verlaufe der Untersuchung besprechen lassen.

Schließlich sei noch auf eine weitere Anforderung hingewiesen, der unsere Methode genügen soll. Diese soll nämlich so beschaffen sein, daß, je sorgfältiger wir nach ihrer Vorschrift Gerade herstellen, desto genauer sollen diese die Geradeneigenschaften aufweisen. Bei der oben besprochenen Art der Definition würde, wie leicht zu sehen, diese Genauigkeit eine Grenze finden an der Genauigkeit der „Normalgeraden". Wir würden also bei unseren Konstruktionen konstante Fehler finden, welche eben von der Ungenauigkeit der Normalgeraden herrühren, welche zu entfernen wir kein Mittel hätten. Konstante Fehler aber sind, wie wir noch näher sehen werden, das Zeichen dafür, daß etwas noch nicht ganz in Ordnung ist[1].

Während dieser Überlegung wurde auch schon die zweite der obengestellten Fragen berührt. Doch müssen wir eine eingehende Behandlung derselben auf später verschieben (Kapitel III), da wir uns erst die nötigen Grundlagen verschaffen müssen.

## § 5. Die empirische Definition von Ebene und Gerade.

Eine derartige Methode, wie wir sie im vorigen Paragraphen als Desideratum hinstellten, um ein Ding der Wirklichkeit herzustellen, wollen wir die *empirische Definition* oder *Realisierung* des betreffenden Begriffes nennen[2].

Wenn wir uns überlegen, daß wir Gerade haben, von denen wir sagen müssen, daß sie sicher sehr genau sind, daß wir Konstruktionen ausführen können, bei denen die

---

[1] Siehe Kap. II, § 12.

[2] Dies im Gegensatze zur logischen Definition, von der bei Beginn des Kap. II noch zu handeln sein wird. In dem Gebäude des Euklid ist (wie *Hilbert* erkannte) eine log. Def. der Geraden unmöglich, da diese ein Grundbegriff ist (s. Kap. II, § 2). Deshalb ist auch die berühmte Definition des Euklid (ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ’ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται) unwesentlich für sein logisches Gebäude. Man hat vielfach versucht, neue „Definitionen" der Geraden aufzustellen, ja man glaubte gelegentlich dadurch dem Paraxe beikommen zu können. Unsere Ausführungen über die log. Gebäude im nächsten Kapitel werden zeigen, warum dies in log. Gebäuden, wo die Gerade Grundbegriff ist, völlig sinnlos ist. Eine logische Definition der Geraden hat nur einen Sinn in einem logischen Gebäude, in dem die Gerade selbst ein abgeleiteter Begriff ist. Andernfalls muß eine „empirische Definition" gegeben werden, aus der sich dann die Axiome ablesen lassen. Das gleiche gilt natürlich von der Ebene. H. *Schotten* hat in „Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichtes", Leipzig 1890, Bd. I, p. 260—338 eine große Menge von „Definitionen" oder auch Erklärungen der Ebene und Geraden zusammengestellt. Und es ist interessant zu bemerken, daß die wirkliche empirische Definition, die seit langer Zeit ausgeübt wird, und die wir alsbald darlegen werden, *nicht* darunter ist.

Widersprüche gegen die Theorie von bemerkenswerter Kleinheit sind, so müssen wir doch daraus schließen, daß wir eine ziemlich genaue wirkliche Gerade haben. Und wenn wir uns vorstellen, was für Zeichnungen wohl Archimedes gemacht haben mag, und sie in Gedanken mit unseren heutigen genauesten vergleichen, dann haben wir auch ein Gefühl, als ob mittlerweile unsere Gerade „genauer" geworden sein müßte. Es sieht also in der Tat so aus, als ob wir in der Praxis die richtige empirische Gerade hätten, nur wissen wir offenbar theoretisch nichts davon. Dies führt uns darauf, einmal zu fragen, wo denn eigentlich unsere empirischen Geraden herkommen, wie sie uns an Linealen, Reißschienen, Winkelhaken entgegentreten. Die gewöhnlichen Erklärungen der Geraden wie: als gespannte Schnur, als Lichtstrahl beim Darübervisieren usw. fallen natürlich völlig außer Betracht, denn niemand wird mit diesen Methoden wirkliche genau gearbeitete Lineale herstellen können, niemand würde sich die mit einem solchen Versuche verknüpfte ungeheure Mühe machen.

Zunächst ist zu beachten, daß die hölzernen Lineale, mit denen man zumeist arbeitet, nach eisernen geschnitten werden. Wo kommen aber die eisernen her? Oft auch wieder von eisernen. Wir haben also gewissermaßen mehrere Generationen von Geraden vor uns, wo eine aus der anderen erzeugt wurde. Es ergibt sich, daß irgendwann und irgendwo einmal mindestens eine Gerade durch „Urzeugung" entstanden sein muß. Die Folgen davon, wenn dies nur einmal geschehen wäre, also eine Normalgerade vorhanden wäre, haben wir im vorigen Paragraphen bereits angedeutet. Eine andere Möglichkeit wäre die, daß wir tatsächlich eine Methode hätten, durch die wir irgendwann gewissermaßen aus dem Nichts heraus eine beliebig genaue Gerade herstellen könnten, eine Methode, die bei ideal sorgfältiger Anwendung auch eine ideal genaue Gerade liefert (was bedeutet, daß aus der theoretisch idealisierten Methode theoretisch das Entstehen der absoluten genauen Geraden folgt).

In der Tat haben wir eine solche Methode, und es ist sehr zu verwundern, daß sie unter den Mathematikern so wenig bekannt ist.

Diese Methode basiert auf der Herstellung, der Urzeugung der Ebene, von der das eben Gesagte in gleicher Weise gilt, wie von der Geraden[1]. Man nimmt dazu drei starre Körper (Eisenplatten), die man in praxi der Einfachheit halber soweit verarbeitet, daß jeder von ihnen eine annähernd ebene Fläche aufweist. Dann schleift man mit Schmirgel durch gegenseitiges Aufeinanderreiben die drei Stücke bei öfterem Wechsel solange aufeinander ab, bis jedes derselben mit jedem anderen vollständig genau aufeinanderpaßt (was durch Dazwischenschieben von dünnem Papier geprobt wird, schließlich muß sich vollständige Adhäsionswirkung bemerkbar machen). Zwei Stücke genügen nicht, da bei zwei aufeinander abgeschliffenen Stücken, wie man leicht sieht, die Möglichkeit besteht, daß eine Kugelfläche zustande kommt. Auf den Beweis, daß auf die genannte Weise in der Tat eine Ebene (oder drei Ebenen) zustande kommt, werden wir im III. Kapitel zu sprechen kommen. Auf diese Weise also stellt man die sog. Richtflächen her[2].

Mit Hilfe solcher Richtflächen (in geeigneter Form) werden

[1] Die Grundlagen der folgenden Ausführung verdanke ich der großen Liebenswürdigkeit des Inhabers der bekannten Präzisionswerkzeugfabrik von Sauter & Messner in Aschaffenburg, Herrn Gerhard Elshorst, welcher die Freundlichkeit besaß, mir auf meine Bitte, genaueren Aufschluß über die Herstellung von Richtflächen und Linealen zu geben, sowie auch mich einen Blick auf die Ausführungstätigkeit der Arbeiter selbst tun zu lassen.

[2] Der Vorgang selbst ist natürlich ein recht umständlicher in der Praxis. Er dient tatsächlich lediglich zur Urzeugung der Ebene. Erst von diesen so entstehenden Ebenen werden die Richtflächen, welche die exakten Arbeiter der Fabrik benutzen, als erste Generation hergestellt. Und zwar geschieht diese Herstellung (wie auch bei den folgenden Generationen, und den nachher zu behandelnden Eisenlinealen) auf die Weise, daß die grob vorgeebnete Fläche, die zu einer Ebene werden soll, mit Schmirgel bestrichen auf die Richtfläche gelegt, einmal vorsichtig hin und her geschoben wird, worauf sie abgehoben und an denjenigen Stellen, welche jetzt schmirgelfrei

dann genaue Eisenlineale hergestellt. Indem man diese 1. auf einer Seite in der in der Anmerkung erwähnten Art eben macht, 2. sie hochkant stellt und nun die Schmalfläche des Parallelepipeds auf gleiche Weise ebnet. Dann gibt der Schnitt der beiden so entstehenden Ebenen eine genaue Gerade. Man sieht, daß man so auch den Punkt empirisch definieren könnte.

Es sei erlaubt, an die Darlegung dieser Vorgänge, welche wir als die „empirische Definition" der Ebene, der Geraden, des Punktes bezeichnen wollen, noch einige methodische Bemerkungen zu knüpfen. Das Wesen der empirischen Definition wird am deutlichsten, wenn wir uns folgende Szene vorstellen: Ich frage jemanden: Was ist eine Ebene? Der Gefragte antwortet keine Silbe, d. h. er gibt keine durch Begriffe ausgedrückte, keine logische Definition der Ebene, er bringt mir auch nicht einen Gegenstand, an dem sich eine ebene Fläche befindet, und deutet darauf (was der schon behandelten Definition durch eine Normalebene entsprechen würde), sondern er geht hin, nimmt drei starre Körper und beginnt den oben beschriebenen Prozeß zur Herstellung einer Ebene. Hätte der Mann eine Normalebene gebracht und darauf gedeutet, so hätte ich nicht gewußt, ob die Farbe oder die feinen Unebenheiten der Oberfläche usw. dazugehören. Bei Anwendung der letzten Methode jedoch weiß ich dies sofort, ich habe sofort „einen Begriff", was eine Ebene sei, oder viel-

erscheinen (die erhöhten Partien) noch weiter bearbeitet wird. Bei den Linealen (welche bis zu 11 m Länge hergestellt werden) geschieht diese Bearbeitung mit einem Spatel mit geschärfter Schneide. Schließlich wird natürlich die Fläche poliert. Man erkennt, daß durch solche Beanspruchung die Urrichtflächen allmählich an Genauigkeit verlieren müssen, daß die Genauigkeit aller erhaltenen Ebenen sich mit der Zeit verschlechtert. Deshalb muß von Zeit zu Zeit immer wieder eine genaue Ebene durch Urzeugung auf dem dargelegten Wege gewonnen werden, nach der dann die übrigen wieder korrigiert werden. — Die einzige kurze Erwähnung dieser interessanten Prozedur, die mir bekannt wurde, steht bei E. Mach, Erkenntnis und Irrtum. Leipzig 1905, p. 363, (mit Figur). Selbst in Luegers Lexikon der gesamten Technik konnte ich nichts darüber finden.

mehr, was sie sein soll. — Statt des Mannes, der die Ebene herstellte, könnten wir uns ebensogut eine Maschine oder einen Naturvorgang denken, der das gleiche ausführt. Es ist also nicht der ausführende Mensch das Wesentliche bei der empirischen Definition, sondern der Vorgang, die Tatsache, daß ein Vorgang sich abspielt, ist das Wesentliche. Erst durch einen Vorgang werden verschiedene Dinge in Beziehungen zu einander gesetzt. Sondern wir diese bei der empirischen Definition auftretenden Beziehungen begrifflich heraus, so haben wir das logische Material, das die logische Definition des Begriffes, d. h. sein Axiomensystem liefert, aus dem alle weiteren Sätze über den Begriff folgen[1].

Diese Darlegungen des letzten Absatzes sollen lediglich auf die Beziehung der empirischen Herstellung eines Dinges zu seiner logischen Definition hinweisen. Wir werden im folgenden Kapitel noch näher hierauf einzugehen haben.

## § 6. Der starre Körper.

Wir haben in den §§ 4 und 5 uns mit denjenigen Dingen der Wirklichkeit beschäftigt, welche den Begriffen Gerade und Ebene in der logischen Geometrie entsprechen. Es ist die Frage, ob dies die einzigen Punkte sind, in denen die logische Geometrie mit der Wirklichkeit zusammenhängt. Darauf gibt uns die logische Geometrie die Antwort, daß Gerade und Ebene noch nicht genügen, um die ganze Geometrie aufzubauen, sondern daß mit deren Hilfe erst ein Teil, die synthetische Geometrie, aufbaubar ist. Um die ganze, also auch die metrische Geometrie zu erhalten, muß noch etwas dazukommen.

Zunächst allerdings möchte es scheinen, als ob nichts mehr nötig sei, wenn wir uns der wirklichen Geraden und Ebenen erinnern, deren Herstellung wir besprachen. Denken wir aber z. B. an die Konstruktion zweier kongruenter Drei-

[1] Siehe hierüber Kap. III, § 7.

ecke aus ihren drei Seiten, dann setzt die Forderung, daß diese Dreiecke dann auch ein für allemal kongruent bleiben sollen, voraus, daß nicht nur die Geraden, welche ihre Seiten bilden, Gerade bleiben, sondern daß sich auch die „Länge" der einzelnen Seiten nicht ändert. Damit aber dies erreicht werde, bedürfen wir sowohl zur Herstellung unserer wirklichen Ebenen und Geraden, als auch sonst, des starren Körpers.

Fragen wir nun, was ein wirklicher starrer Körper eigentlich sei, so ergibt sich wieder die völlige Wertlosigkeit einer logischen Definition sowie einer Definition durch einen „Normalkörper". Wir verlangen also wiederum eine empirische Definition des wirklichen starren Körpers d. h. eine Methode, welche die schon genannten Eigenschaften hat, daß sie uns einen starren Körper immer wieder, gewissermaßen aus dem Nichts heraus, herzustellen gestattet, ferner aber, daß diese Methode, je sorgfältiger wir sie anwenden, desto genauere Resultate liefert.

Diese empirische Definition des starren Körpers besteht nun im Folgenden[1]: Wir nehmen aus der wirklichen Natur irgendeinen Körper heraus (praktisch natürlich einen solchen, der sich von vornherein möglichst wenig ändert) und erforschen mit ihm die Naturerscheinungen, welche verändernd auf die Größe von Körpern einwirken, indem wir aus ihm Meßapparate, Skalen, Maßstäbe usw. herstellen.

Denken wir uns dann irgendeine Ursache, welche unseren Körper in seiner Größe verändert[2], dann können wir eine Vorrichtung treffen, so daß wir die Erscheinung messend be-

---

[1] Diese empirische Definition scheint zum ersten Male vom Verfasser gegeben worden zu sein, siehe „Grundlinien", p. 34 f. Die empirische Methode ist als solche natürlich längst vorhanden, nur scheint sie noch nicht vorher als das erkannt worden zu sein, was wir als empirische Definition hier bezeichnen, und nicht in ihren Eigenschaften theoretisch herausgearbeitet.

[2] Die exakte Definition dafür, welche Umstände die Größe des Körpers ändern, werden wir erst später geben können (Kap. III, § 5).

herrschen können, trotzdem unser messender Maßstab selbst vielleicht derselben unterliegt. Halten wir dann die Erscheinung so genau als mit dem momentanen Maßstab möglich ist, konstant, oder berechnen wir aus den beobachteten Vorgängen eine Korrektur, welche die Einwirkung der Erscheinung wenigstens zahlenmäßig eliminiert, dann haben wir nunmehr einen Körper, welcher der betreffenden Erscheinung nur mehr in dem Maße unterliegt, als unsere Messungen „Ungenauigkeiten[1]" zeigen. Mein starrer Körper ist also besser geworden als vorher, wo er dieser Erscheinung noch völlig preisgegeben war. Mit diesem besseren starren Körper beginne ich das Verfahren (bei dieser und allen übrigen Erscheinungen) von neuem und erhalte so einen noch besseren starren Körper, usw.

Solche Erscheinungen, wie eben erwähnt, werden auf dem Wege gefunden, daß von zwei vorher verglichenen starren Körpern der eine einer Manipulation unterworfen, der andere möglichst von jeder Veränderung ferngehalten wird. Ist dann nach der Manipulation eine Veränderung des einen gemessen am andern zu bemerken, dann hat diese Manipulation eine Veränderung bewirkt.

Das typische Beispiel für einen solchen starren Körper, der so starr als dies momentan möglich gehalten wird, ist der „mètre des archives" in Sèvres bei Paris[2].

Da wir später darauf zurückkommen müssen, sei gleich hier noch auf folgenden Umstand hingewiesen. Aus der Art unserer Herstellung eines starren Körpers geht hervor, daß wir auf jeder Stufe der Naturerforschung einen eigenen starren Körper haben. Je mehr Ursachen wir nämlich ausfindig machen, die verändernd auf den starren Körper einwirken, je genauer wir diese erforschen und unserer Messung zugänglich machen, desto genauer werden unsere Korrektionen und damit unsere starren Körper. Dieser Prozeß ist, worauf

[1] Wie diese Ungenauigkeiten feststellbar sind, siehe Kap. III, § 4.

[2] Nähere Beschreibung bei C. Runge, Enzyklop. d. Math., V. 1, p. 12 („Maß und Messen").

hier nur kurz hingewiesen sei, wie aber auch sofort einleuchtet, ein unendlicher und immer fortschreitender. Da wir aber auch alle übrigen Naturerscheinungen mittels starrer Körper messen müssen, so erkennt man die Abhängigkeit dieser Messungen vom starren Körper, und wir können das aussprechen, was ich a. a. O.[1] als das „Prinzip der Genauigkeitsschichten" bezeichnet habe: Auf jeder Stufe der Naturerforschung haben wir einen bestimmten starren Körper und damit eine bestimmte Meßgenauigkeit. Beide werden automatisch immer besser.

Wir wollen noch festhalten, daß die angegebene Methode zur Herstellung des starren Körpers so beschaffen ist, daß alle an einem Körper wahrnehmbaren Größenveränderungen bei ihm eliminiert werden, und zwar derart, daß der starre Körper an jedem Orte, wo wir ihn auch hinbringen, derselbe bleibt. Darin liegt aber, daß wir unseren starren Körper so herstellen, daß die Bewegung im Raume als solche keine Veränderung auf seine Größenverhältnisse ausüben kann. Das Resultat dieses Vorgehens wird dann, daß der Raum als solcher keine Ursache einer Größenveränderung sein kann. Hier soll nur kurz auf diesen Umstand, mit dem wir uns noch zu beschäftigen haben werden, hingewiesen sein.

Um nun hier auch schon den Zusammenhang des starren Körpers mit der Geometrie unseres Raumes zu streifen, beachten wir folgendes. Es ist einleuchtend — wir werden später noch die genauen Beweise dafür zu bringen haben (Kap. III) —, daß mit dem starren Körper die ganze Geometrie unseres Raumes bestimmt ist. „Mit dem starren Körper" heißt hier soviel, als daß wir voraussetzen, es seien die Größenverhältnisse eines starren Körpers für alle seine möglichen Lagen im Raume bekannt[2]. Nun erreichen wir aber, wie wir eben sahen, bei unserem momentanen empirischen

[1] „Grundlinien" p. 36.

[2] Daraus folgt dann auch, daß sich die empirische Gerade durch den starren Körper definieren lassen müssen, worauf wir später noch näher einzugehen haben werden.

starren Körper nur eine bestimmte momentane Meßgenauigkeit, und es folgt, daß empirisch unsere Geometrie immer nur bis zu dieser Genauigkeit bestimmt ist. Andererseits haben wir aber gesehen, daß unsere starren Körper und unsere Meßgenauigkeit automatisch immer besser, immer genauer werden, und zwar, wie sich versteht, um lauter endliche Schrittchen. Wir können daher vermuten, daß unsere empirische Geometrie gegen eine bestimmte ideale Geometrie hin konvergiert im Verlaufe der Forschung. Unsere folgende Untersuchung (Kap. II) wird dies zu beweisen haben, sowie die Frage zu beantworten haben, welches diese Geometrie ist.

Zuvor aber müssen wir uns in einem weiteren Abschnitte mit dem Zusammenhange etwas beschäftigen, der bei den wichtigsten bisherigen Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie zwischen der logischen und der empirischen Geometrie besteht.

---

## III. Abschnitt: Die Stellung des Parallelenaxioms in der Geometrie.

### § 7. Das Parallelenaxiom und der starre Körper.

Nachdem wir uns nun im ersten Abschnitte dieses Kapitels wesentlich mit dem logischen Teil, im zweiten Abschnitte mit dem empirischen Teile der Geometrie beschäftigt haben, wollen wir uns nunmehr dazu wenden, das Verhältnis dieser beiden Teile zu einander zu studieren, wie es sich in den bisherigen Darstellungen der Geometrie kundgibt. So wollen wir denn zunächst einmal untersuchen, was sich über den wichtigsten, und, wenn man so will, interessantesten Teil dieses Verhältnisses sagen läßt, nämlich den Zusammenhang des sog. Parallelenaxioms mit der empirischen Geometrie.

Bekanntlich besitzen wir in der neueren oder synthetischen Geometrie ein Gebäude, welches sich als empirischer Elemente lediglich des Punktes, der Geraden und der Ebene bedient. Die Axiome, die diesem Gebäude zugrunde liegen[1], beschränken sich auf Aussagen über das Ineinanderliegen und Gemeinsamhaben dieser Elemente, sowie auf die Art ihres Bestimmtseins. Es sind das diejenigen Axiome der Geometrie, welche vor allen anderen als unmittelbar einleuchtend gelten, und an deren Gültigkeit im empirischen Raume wesentliche Zweifel nicht aufkamen.

Die vollkommene Unabhängigkeit dieser Geometrie vom Parallelenaxiom, die durch F. Kleins berühmte Untersuchungen[2] festgestellt wurde, und die im Gefolge hat, daß sie den gewöhnlichen nichteuklidischen Geometrien und der Euklidischen Geometrie gemeinsam ist, hob diese Geometrie vor der metrischen als die gewissermaßen völlig empirisch gesicherte heraus. Im Gegensatze hierzu schien man, worauf wir schon hingewiesen haben, bei der Frage nach der Art unserer metrischen Geometrie völlig auf die Erfahrung angewiesen zu sein.

Bekanntlich kann man nun mittels rein synthetischer Mittel ein Koordinatensystem im erreichbaren Raume einführen, wie das F. Lindemann[3] ausführlich dargestellt hat. Dann erhält, wenn wir uns der Einfachheit halber auf die Ebene beschränken, innerhalb eines gewissen Bereiches jeder Punkt ein Zahlenpaar und ebenso entspricht in einem gewissen Bereiche von Zahlenpaaren jedem Zahlenpaare ein Punkt. Denken wir uns nun in einer empirischen Ebene eine solche Zuordnung eingeführt und festgehalten. Will ich dann zu einer gegebenen Figur, etwa einer Strecke, deren Endpunkte auf der Ebene analytisch (d. h. durch ihre Zahlenpaare) gegeben sind, eine kongruente Figur an einer andern Stelle der Ebene aufsuchen, so ist diese Aufgabe empirisch völlig bestimmt, indem ich nur dieselbe Figur auf einem empirischen

[1] S. z. B. Pasch, Vorles. über neuere Geometrie 1882, F. Enrigues, Vorles. über projektive Geometrie 1903 (ital. 1898).

[2] Math. Ann. IV. (1871) p. 623 u. besonders VI. (1873).

[3] Clebsch-Lindemann, Vorles. über Geometrie, Leipzig 1891, Bd. II, Teil 1, p. 448 ff.

starren Körper — dem starren Körper, dessen Herstellung wir in § 6 besprachen — auftrage, diesen nach einer andern Stelle der Ebene bewege, und dort die Figur wieder auf die Ebene übertrage. Analytisch steht dies jedoch so: Da meine Zuordnung völlig ohne den starren Körper hergestellt ist, so ist es mir unmöglich, von vornherein zu entscheiden (logisch, durch Rechnen abzuleiten), welche analytisch ausgedrückte andere Strecke mit meiner vorgegebenen kongruent sein könnte. Das logische Äquivalent des eben beschriebenen Vorganges liegt in dem Satze, daß es unmöglich ist, aus den Axiomen der synthetischen Geometrie (die das enthalten, was wir allein bei der Herstellung der Zuordnung benutzten) einen Satz über die Gleichheit von Strecken abzuleiten. Die einzige Möglichkeit, um bei einem solchen Koordinatensystem etwas über gleiche Strecken zu erfahren, besteht also darin, hinterher eine starre Strecke empirisch in ihr zu bewegen und die Koordinaten ihrer Endpunkte durch Messung zu bestimmen. Wir können also sagen: In ein Lindemannsches Koordinatensystem, das empirisch gegeben vorliegt, läßt sich der empirische starre Körper nur hinterher durch empirische Messung einführen[1].

Es erhebt sich nun die Frage, läßt sich überhaupt der starre Körper von vornherein in die Geometrie einführen, oder präziser gesagt läßt sich die Geometrie so aufbauen, daß wir Sätze über die Kongruenz von Figuren von vornherein aussprechen können, welche stets und genau in der Wirklichkeit Geltung haben? Wir sahen eben, daß die empirischen Elemente Punkt, Gerade, Ebene als solche noch nicht hinreichen, um uns eine volle Maßgeometrie (die wir als Vollgeometrie bezeichnen wollen) zu liefern. Würde nun durch Einführung des starren Körpers eine solche Vollgeometrie erreichbar sein, der wir die gleiche „Richtigkeit" zusprechen könnten, wie oben den synthetischen Axiomen, dann müßte

[1] Diese, jedem Geometer selbstverständlichen Sätze, werden hier zu dem Zwecke vorgetragen, um auf die empirischen Vorgänge dabei hinzuweisen.

eine solche Geometrie auch eine ganz eindeutige bestimmte Aussage enthalten, die den Platz des Parallelenaxioms einnimmt, es müßte dann also über „die Natur des Raumes" die endgültige Entscheidung getroffen sein.

Wir gehen nun einen Schritt weiter und nehmen[1] zu den Axiomen der synthetischen Geometrie (die wir jetzt der Hauptsache nach als die Axiome der Verknüpfung und Anordnung bezeichnen wollen) die Kongruenzaxiome hinzu, etwa in der Gestalt, die ihnen D. Hilbert gegeben hat. Wir wollen also jetzt die Kongruenz von Figuren logisch gleich von vornherein in unser logisches System der Geometrie aufnehmen, was eben durch Hinzunahme der Kongruenzaxiome geschieht.

Was wir zu erreichen suchen, ist etwas derartiges zu den genannten Axiomen und empirischen Elementen der synthetischen Geometrie hinzuzunehmen, daß wir eine Vollgeometrie erhalten. Was läßt sich darüber aussagen, wie dieses „etwas" beschaffen sein muß? Untersuchen wir zunächst, ob die Kongruenzaxiome die verlangte Ergänzung leisten, oder wenn nicht, was sie dann leisten.

Betrachten wir die Hilbertschen Kongruenzaxiome[2]: „Kongruenz" ist eine Relation. Zunächst müssen also ihre Relationsgesetze[3] angeschrieben werden (III. 2. und III. 5)[4], ferner die Eindeutigkeit (III. 1. und III. 4.), und schließlich wird auch noch gefordert, daß, wenn die notwendigen und hinreichenden Bestimmungsstücke zweier Figuren kongruent sind, auch die übrigen analogen Stücke der Figuren kongruent sein sollen (III. 3 und III. 6)[5]. Sagen nun diese

[1] Nach D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 2. Aufl.

[2] l. c. p. 7.

[3] S. „Grundlinien" p. 10 f.

[4] Zu denen eigentlich (formal) noch gehörte: wenn ($a \equiv b$), so ist auch ($b \equiv a$), für Strecken und Winkel.

[5] Natürlich nur für die allereinfachsten beiden Fälle, die aber zur Zusammensetzung und Herleitung aller weiteren genügen. Im übrigen zeigt schon die Nummerierung der Axiome, wie tief dieser Forscher in die Systematik der Axiome eingedrungen ist.

Axiome über die Wirklichkeit etwas aus? Zunächst führen sie die neuen Begriffe der Strecke und des Winkels (und damit auch des Dreiecks) ein. Jedoch ist kein Kriterium zu erkennen, wann zwei solche Stücke kongruent sind. Alle diese Axiome haben die Form von sog. hypothetischen Sätzen: Wenn das ist, so ist das. Es ergibt sich, daß diese Axiome in der Tat nichts über die Wirklichkeit aussagen. Daß dies auch so sein muß, erkennen wir, wenn wir Euklid vergleichen.

Euklid sagt, daß Größen kongruent sind, wenn sie sich decken beim Aufeinanderlegen. Er führt damit die „Bewegung" ein in der Geometrie, woran vielfach Anstoß genommen wurde. Hilbert jedoch vermeidet dies gemäß seinem schon besprochenen Prinzipe, indem er auf den rein logischen Gehalt zurückgeht. Und dieser ist kein anderer, als der in den genannten Axiomen gegebene, welche insbesondere auch folgendes aussagen: Setze ich bei gewissen entsprechenden Stücken zweier Figuren voraus, daß sie kongruent sind, und habe ich vorher in Axiomen vorausgesetzt, daß wenn an bestimmten Figuren bestimmte Stücke kongruent sind, dies auch bei bestimmten anderen der Fall sein soll (wobei es völlig gleichgültig ist, welche empirische[1] Beziehung ich als „kongruent" bezeichne), so ergeben sich eben rein logisch je nach der Figur eine Reihe von Sätzen. Hilbert hat also völlig richtig das rein Logische herausgeschält, und die Euklidische Definition der Kongruenz ist für ein logisches Gebäude völlig wertlos, falls er eben die richtigen Axiome einführt.

Wir sehen also, daß durch das rein logische Einführen der Kongruenzaxiome gar nichts Neues über die Wirklichkeit ausgesagt wird. Die Kongruenz als solche bekommt erst einen wirklichen Sinn, wenn wir sie empirisch definieren. Das geschieht nun stets mittels des starren Körpers. Doch ist dieser in den Axiomen keineswegs festgelegt, vielmehr dürfte eine Figur, die mit einer kongruenten sich

[1] Den obigen Relationsgesetzen gehorchende.

deckte, sich noch verändern, wenn sie nur bei neuem Auflegen wieder kongruent geworden ist. Es zeigt sich also, daß wir bis jetzt zwar auf Grund der Kongruenzaxiome von starren Strecken und Figuren reden, daß aber diese als starr noch nicht charakterisiert werden können. Wir haben also noch keine Vollgeometrie, wie das ja auch logisch daraus hervorgeht, daß wir mit unseren bisherigen Axiomen den Parax nicht beweisen können.

Nun ist aber die Frage: Wir haben gesehen, daß bisher der starre Körper noch nicht völlig charakterisierbar ist, mit unseren bisherigen Mitteln. Ist er aber noch ganz beliebig? Diese Frage beantwortet sich dadurch, daß wir als empirische Elemente bisher die Gerade und die Ebene eingeführt haben; und von ihnen verlangen wir, daß sie bei allen Operationen mit ihnen auch stets solche bleiben. Daraus sehen wir, daß unser starrer Körper nicht mehr vollständig beliebig ist, sondern daß Punkte an ihm, welche einmal in einer Geraden oder Ebene lagen, auch stets in solchen bleiben müssen. Den so beschränkten starren Körper wollen wir den „projektiv starren Körper" nennen. Die „Länge" von Strecken ist aber damit noch nicht starr geworden.

Was nunmehr von uns verlangt wird, ist also wie gesagt folgendes: Es soll zu unseren bisherigen Hilfsmitteln etwas derartiges, d. h. ein X derart hinzukommen, daß unsere Geometrie eine Vollgeometrie wird, d. h. daß der starre Körper vollständig charakterisiert wird. Wir haben eben rein logisch starre Strecken eingeführt, sahen aber, daß wir kein Kriterium dafür hatten, ob die Strecken auch wirklich starr waren. Ein solches Kriterium also ist es, was wir suchen, das X; haben wir ein solches, dann ist der starre Körper charakterisiert, die Vollgeometrie erreicht. Daraus folgt, daß dies Kriterium etwa folgende Form haben muß: „Die Strecken sind dann und nur dann wirklich starr, d. h. der starre Körper ist dann und nur dann der richtige, wenn die und die Bedingung in der Wirklichkeit erfüllt ist." Und von welcher Art muß die Bedingung sein? Sie muß etwas über die einzigen empirischen Elemente, die wir haben, aussagen, die da sind Punkte, Gerade, Ebenen, Strecken und Winkel. Diese noch fehlende Bedingung X enthält (neben dem Archimedischen, das uns hier nicht beschäftigt) als Hauptsache das oder ein Parallelenaxiom. So daß der obige Satz sich ausspricht: Die Strecken der Kongruenzaxiome sind dann und nur dann starr, wenn das betreffende Parallelenaxiom erfüllt ist. Und damit ist der starre Körper völlig charakterisiert.

Diese letzten Sätze sind nun noch näher zu begründen. Wir stehen hier an der Stelle, wo das Parallelenaxiom, die sog. crux mathematicorum, seinen Ursprung hat. Es erhebt sich nämlich die Frage: Wenn diese völlige Charakterisierung des starren Körpers solche Schwierigkeiten macht, warum führen wir ihn dann nicht selbst auf einmal in die Geometrie ein, genau wie wir in der Wirklichkeit neben dem Reißbrett und Lineal (Ebene und Gerade) den Zirkel als starren Körper in der Tat benutzen? Die Antwort auf diese Frage besagt: daß dieses letztere Vorgehen, wenn auch praktisch zu rechtfertigen, so doch im gewissen Sinne theoretisch falsch ist. Denn wie schon aus unseren obigen Bemerkungen über den projektiv starren Körper hervorgeht: starrer Körper und Gerade (Ebene) sind nicht unabhängig voneinander. Dies zeigen u. a. sofort die sog. Mascheronischen Konstruktionen.

Und hier stehen wir nun vor zwei Möglichkeiten:

1. eine Geometrie aufzubauen, welche direkt den starren Körper einführt, und aus ihm die Gerade und Ebene erst definiert (wir werden uns mit ihr noch näher zu beschäftigen haben[1]). Oder:

2. eine Geometrie, welche die empirische Ebene und Gerade als empirische Elemente einführt (wie das Euklid getan). Mit diesen empirischen Elementen ist jedoch der starre Körper noch nicht völlig charakterisiert, eine Vollgeometrie noch nicht erreicht. Diese Geometrie muß daher noch eine Aus-

[1] Kap. III. § 4.

sage über gewisse Verhältnisse einer empirischen Figur hinzunehmen, um diese Charakterisierung zu vollenden.

Wenn wir oben sagten, daß es theoretisch unrichtig sei, Lineal und Zirkel gleichzeitig einzuführen, so gilt das nur, soweit dadurch Überbestimmungen eingeführt werden[1]. Wir wissen genau, wieviel vom starren Körper hinzukommen muß zu den empirischen Elementen der synthetischen Geometrie, um eine Vollgeometrie zu erhalten: in der Ebene ein fester nicht zerfallender Kegelschnitt, im Raume eine nicht geradlinige, reelle Fläche zweiten Grades[2].

Der zweite Weg ist der, den die historische Geometrie eingeschlagen hat. Es ist nun verständlich, daß die hinzukommende Bestimmung sich bereits auf eine zusammengesetzte Figur beziehen mußte, ferner ist verständlich, daß man einen solchen Satz nicht als unmittelbar einleuchtend erkennen wollte. Zweifelte man aber an diesem Satze, so zweifelte man nach dem obigen daran, ob durch diesen Satz unser starrer Körper richtig gegeben (charakterisiert) sei. Wollte man also diesen Satz durch „Messung" prüfen, so hieß das, wir wollten messen, welches unser starrer Körper sei — ein Unternehmen, welches auch von dieser Seite aus betrachtet sich als widersinnig erweist. Man erkennt aber auch, daß sich vom Standpunkte dieser historischen Geometrie aus kein anderer Weg zeigte, um zu der Überzeugung von der Richtigkeit des Parallelenaxioms zu gelangen.

Wir können zusammenfassen: Führe ich Gerade und Ebene als empirische Grundelemente meiner Geometrie ein, dann kann ich, da Gerade und starrer Körper abhängig voneinander sind, letzteren nicht mehr

[1] Solche sind aber bei den gewöhnlichen Konstruktionen tatsächlich meist vorhanden.

[2] Siehe die Steinerschen Konstruktionen. Mit unserem starren Körper erzeugt, stellen sich die beiden Gebilde als Kreis und Kugel dar, von denen wir aber eben nicht wissen, ob sie tatsächlich solche sind, solange wir über die Geometrie unseres Raumes keine Entscheidung haben. Logisch entspricht diesen empirischen Einführungen eben irgendein Parallelenaxiom.

unabhängig in die Geometrie einführen (was den Vorzug eines direkten Anschlusses meines logischen Aufbaues an die Wirklichkeit hätte), sondern ich kann vom starren Körper logisch nur soviel einführen, als zu dem vorhandenen noch hinzukommen muß, um den ganzen starren Körper zu ersetzen. Gleichzeitig ergeben sich dann die Gründe für die relativ verwickelte Form des Parallelenaxioms.

## § 8. Die Untersuchungen von Riemann, Helmholtz und Lie.

Da, wie schon öfter bemerkt, unser Hauptproblem der Zusammenhang der Geometrie mit der Wirklichkeit ist, so wird es sich empfehlen, nachdem bisher nur die Euklidische Richtung berücksichtigt wurde, diesem Zusammenhang auch bei den hauptsächlichsten Autoren jener andern Richtung in der Grundlagenforschung nachzugehen, welche von Riemann inauguriert wurde[1].

Die berühmte Riemannsche Abhandlung hat eine große Reihe von ausgezeichneten Analysen und Besprechungen erfahren. Wir fragen uns hier lediglich nach dem Zusammenhang, den Riemann zwischen seinen logischen Aufstellungen und der Wirklichkeit annimmt. Schon im ersten Absatze seiner Untersuchung[2] spricht sich Riemann klar über diesen Punkt aus, aus dem er direkt die Begründung für sein Vorgehen entnimmt. Es hat sich logisch ergeben, daß eine „dreifach ausgedehnte Größe" (als logischer Begriff) „verschiedener Maßverhältnisse fähig sei" (ebenfalls rein logisch zu verstehen). Unter der Voraussetzung, daß der Raum eine solche dreifach ausgedehnte Größe sei, und unter der Voraussetzung, daß dieser einer einzigen, ganz bestimmten Art des Maßverhältnisses zu unterwerfen sei, folgt, daß auf irgendeinem Wege eine bestimmte Art des Maßverhältnisses für

[1] Bernhard Riemanns Gesammelte math. Werke 1876 p. 254—269. „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen"
[2] p. 254, 255.

den Raum ausgewählt werden müsse. Dies ist das einzige, was gefolgert werden kann. Riemann jedoch sagt: „Hiervon aber ist eine notwendige Folge, daß diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Größen unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können", ein Satz, welcher ersichtlich nicht aus den vorstehenden Aussagen logisch sich ableiten läßt und eine unbewiesene Behauptung enthält. Es lassen sich nun „mehrere Systeme einfacher Tatsachen angeben, welche zur Bestimmung der Maßverhältnisse des Raumes hinreichen", und es ist eine Aufgabe, verschiedene solche Systeme aufzusuchen. „Diese Tatsachen, sagt Riemann, sind wie alle Tatsachen nicht notwendig, sondern nur von empirischer Gewißheit, sie sind Hypothesen." In Ergänzung hierzu zeigen die Schlußbemerkungen des Aufsatzes, wie auf Grund neuer Erfahrungen, d. h. von Tatsachen, welche sich mit den bisherigen Hypothesen nicht erklären lassen, die bestehende Auffassung allmählich umgearbeitet wird[1].

In seinen sonstigen Ausführungen benutzt Riemann einige geometrische Tatsachen, wie „Unabhängigkeit der Linien von der Lage" usw. zur geometrischen Interpretation seiner Resultate, ohne sich jedoch irgendwie auf die entsprechenden empirischen Verhältnisse einzulassen[2], auf die sich bei diesen Worten ebenfalls zu beziehen wohl seine Absicht war.

So zeigt sich, daß die geniale Abhandlung Riemanns nicht viel für unsere spezielle Frage zu bieten vermag, wie bedeutungsvoll sie auch sonst für die Mathematik geworden ist. Doch teilt sie dies mit den übrigen Untersuchungen jener Zeit, welche sich die zunächstliegende Aufgabe stellte, die logischen Möglichkeiten recht eingehend zu behandeln, und so verständlicherweise unsere Fragen noch etwas beiseite liegen ließ.

---

[1] p. 268.

[2] Indem er z. B. untersucht und angegeben hätte, wie sich empirisch die „Unabhängigkeit der Linien von der Lage" (p. 265) feststellen läßt.

Gleichzeitig mit Riemann und später hat sich H. Helmholtz mit den Grundlagen der Geometrie beschäftigt[1]. Er stellt sich die Aufgabe, die Euklidische Geometrie durch eine hinreichende Zahl von Tatsachen zu charakterisieren. Er benutzt hierzu Eigenschaften der Beweglichkeit der starren Körper. Doch gelingt ihm seine eigentliche Absicht nicht, sondern er vermag nur alle Formen der Geometrie auszuschließen außer der Euklidischen und Lobatschefskyschen.

Helmholtz behandelt im Gegensatz zu Riemann stets und eingehend den Zusammenhang seiner Untersuchungen mit der Wirklichkeit. Insbesondere in den beiden letzten der genannten Aufsätze spricht er sich ausführlich über diesen Punkt aus. Eine eigentliche Theorie bezüglich dieses Zusammenhanges, wie wir sie später zuerst bei F. Klein finden[2] z. B., hat Helmholtz noch nicht, soweit man nicht den einfachen Empirismus als eine solche bezeichnen will. Doch macht er gelegentlich Bemerkungen, welche die scharfe Beobachtungsgabe eines Mannes, dessen Arbeitsgebiet zu gutem Teile in der Wirklichkeit liegt, erkennen lassen. So z. B. in der zweiten der genannten Abhandlungen (p. 618): „Wieviel von den Sätzen der Geometrie hat objektiv gültigen Sinn? wieviel ist im Gegenteil nur Definition oder Folge aus Definitionen, oder von der Form der Darstellung abhängig? Diese Frage ist meines Erachtens nicht so ganz einfach zu beantworten, da wir es in der Geometrie stets mit idealen Gebilden zu tun haben, deren körperliche Darstellung in der Wirklichkeit immer nur eine Annäherung an die Forderungen des Begriffes ist, und wir darüber, ob ein Körper

---

[1] „Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie" (1866) Wiss. Abh. II, p. 610.

„Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen" (1868) ibid. p. 618.

„Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome" (1870) Vorträge und Reden II, p. 3.

„Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze; Antwort gegen Herrn Professor Land" (1878) Wiss. Abh. II, p. 640.

[2] S. Kap. II, § 14.

fest, ob seine Flächen eben, seine Kanten gerade sind, erst mittels derselben Sätze entscheiden, deren tatsächliche Richtigkeit durch die Prüfung zu erweisen wäre[1]". Schließlich ist es wohl auch bei Helmholtz immer wieder die Tatsache, daß es ihm nicht gelingt den Euklidischen Raum durch eine einfache und naheliegende allgemeine Eigenschaft vor den nichteuklidischen zu charakterisieren, welche ihm als einzige Möglichkeit die übrig zu lassen scheint, daß die endliche Feststellung hierüber nur durch die Erfahrung geschehen könne. Er sagt (3. Abh. p. 22): „Denknotwendigkeiten, die aus dem Begriff einer solchen Mannigfaltigkeit und ihrer Meßbarkeit, oder aus dem allgemeinsten Begriff eines festen, in ihr enthaltenen Gebildes und seiner freiesten Beweglichkeit herfließen, sind sie nicht (nämlich: die besonderen Bestimmungen, welche unseren Raum als ebenen Raum charakterisieren)." Wir werden im 3. Kapitel auf diesen Punkt zurückzukommen haben.

Wenden wir uns schließlich zu den Untersuchungen von S. Lie[2], so ist zunächst zu bemerken, daß Lie zu den Fragen nach dem Zusammenhang der geometrischen Theorie mit der Wirklichkeit an keiner Stelle sich ausspricht, vielmehr seine Untersuchungen im wesentlichen als rein analytische durchführt, wenn er auch am Schlusse eine Verwertung derselben zum Aufbau der Geometrie als möglich betont. Das Problem, welches er sich stellt, und welches er als das Riemann-Helmholtzsche Problem bezeichnet, lautet so (l. c. p. 397): Es sollen solche Eigenschaften gefunden werden, die sowohl der Schar der Euklidischen als den beiden Scharen von nichteuklidischen Bewegungen zukommen und durch die diese drei Scharen vor allen andern möglichen Scharen von Bewegungen einer Zahlenmannigfaltigkeit ausgezeichnet sind.

---

[1] Ferner sei noch auf die berühmt gewordenen, ihrer Form nach geradezu klassischen Darlegungen dieses Forschers in der 3. genannten Abhandlung von p. 22 bis 31 hingewiesen.

[2] Lie-Engel, „Theorie der Transformationsgruppen", III. Bd. Abteilung V, p. 393—543.

Alle drei in diesem Paragraphen genannten Forscher führen ihre Untersuchung mit den Mitteln der Analysis. Sie stellen das Axiom an die Spitze, daß der Raum als eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Punkten angesehen werden könne, und operieren in der entsprechenden Mannigfaltigkeit der Trippel der reellen Zahlen analytisch. Den Einwurf, daß eine solche Voraussetzung auch eine bestimmte, ausgeführte und starre solche Zuordnung voraussetzt, vermeiden sie, indem sie sich bemühen, den Raum durch möglichst allgemeine, von der speziellen Art der Zuordnung möglichst unabhängige Eigenschaften zu charakterisieren. Solche finden sie in Aussagen über die freie Beweglichkeit fester Körper, aber diese führt nur wiederum zu dem nichteuklidischen und dem Euklidischen Raume gemeinsam. Es gelingt also nicht, die Euklidische Geometrie als solche durch eine so selbstverständliche Sache wie die freie Beweglichkeit des starren Körpers zu charakterisieren, und damit versagt auch dieser Versuch, Aufschluß über die Geltung dieser Geometrie in unserem wirklichen Raume zu erhalten[1].

Wir werden im 3. Kapitel auf diese Dinge noch zurückzukommen haben. Hier jedoch können wir den Inhalt des vorliegenden Kapitels kurz dahin zusammenfassen, daß die angeführten Forschungen über die Grundlagen der Geometrie noch nicht in der Lage waren, eine Lösung des genannten Problems zu geben; daß man zwar durch eine Reihe klassischer Untersuchungen in bezug auf die logischen Verhältnisse keinen Zweifel mehr haben konnte, daß aber andererseits völlig das Element fehlt, welches diese logischen Untersuchungen erst zu eigentlich geometrischen macht: der Zusammenhang mit der Wirklichkeit. Mit diesem werden wir uns nun im nächsten Kapitel näher zu befassen haben.

[1] Wenigstens hatte Helmholtz ausgesprochenermaßen (I. 616, 617) zuerst gemeint, es gelinge so die Euklidische Geometrie zu charakterisieren, und sehr wahrscheinlich hat auch Riemann gehofft, durch seine Untersuchungen zur Lösung dieser Frage beizutragen.

# II. Kapitel: Die Theorie der angewandten Mathematik.

## I. Abschnitt: Grundlegendes.

### § 1. Das Problem und der Weg der Untersuchung.

Im Laufe der Untersuchungen des vorigen Kapitels haben wir uns überzeugt von dem Vorhandensein eines wichtigen und bisher ungelösten Problems der Geometrie, welches wir kurz etwa so formulieren können: Wie hängt unsere Geometrie mit der Wirklichkeit zusammen. Wir haben außerdem den Weg etwas verfolgt, auf dem sich dieses Problem speziell an Hand der Studien über das Parallelenaxiom im Laufe der Zeit herausgearbeitet hat, und es wird nunmehr unsere Sache sein müssen, an das Problem selbst heranzutreten.

Dieses Problem ist nun aber ein Teilproblem eines viel umfassenderen Problems, nämlich des folgenden: Wie hängen überhaupt unsere theoretischen Wissenschaften mit der Wirklichkeit zusammen. Ist doch die Geometrie nur das erste und einfachste Beispiel einer solchen theoretischen Wissenschaft, die sich mit den Dingen der Wirklichkeit beschäftigt. Nun sind aber unsere sogenannten theoretischen Wissenschaften keine andern als diejenigen, welche Mathematik in irgendeiner Form als Hilfsmittel zur Erforschung der Wirklichkeit verwenden. Nun hat man sich aber seit einiger Zeit daran gewöhnt, diese Verwendung der Mathematik zur Erforschung der Wirklichkeit als angewandte Mathematik zusammenzufassen. So kommt es, daß unser erweitertes Problem als das Grundproblem der angewandten Mathematik bezeichnet werden kann, dasjenige Problem, welches nach der Art und Tragweite dieser Anwendung der Mathematik auf die Wirklichkeit fragt, und so diese erst eigentlich begründet.

Nun wird das in den Wissenschaften erforschte Verhalten der Wirklichkeit zumeist in der Form von sog. Gesetzen ausgesprochen. Es wird also auch unsere Aufgabe sein müssen, die Art zu untersuchen, in der diese Gesetze sich aus der Wirklichkeit und der logischen Untersuchung ergeben. Dabei ist der Begriff „Gesetz" hier so weit gefaßt, daß jede Aussage über Verhältnisse der Wirklichkeit, also z. B. jeder geometrische Satz, darunter fallen soll.

Auf welchem Wege nun können wir diese Probleme in Angriff nehmen? Hier müssen wir gleich einen Weg als ungangbar ausschalten, den durch logische Schlüsse. Fragen wir uns z. B., ob wir durch logische Schlüsse aus den Axiomen des Euklid eine Entscheidung über die Natur des Raumes ableiten können, so müssen wir antworten: nein. Denn dazu müßte die Geltung der Axiome im Raume bereits sicher sein. Nehmen wir speziell das Parallelenaxiom, und denken uns sämtliche Axiome Euklids gegeben, dann setzen wir die zu beweisende Tatsache schon voraus. Lassen wir den Parax weg, so kann aus den übrigen Axiomen bekanntlich nichts über seine Geltung oder Nichtgeltung gefolgert werden. Damit fällt auch die Möglichkeit der Hilbertschen axiomatischen Methode für den momentanen Zweck außer Betracht.

Es ist vielmehr das Problem: wie erhalten wir aus der Wirklichkeit die Gesetze der Wirklichkeit. Und diese Frage geht in Richtung auf die Methode, mit der wir die Gesetze erhalten. Diese Methode also ist zu untersuchen. Und wie erkennen wir, daß wir die „richtige" Methode haben? Auf zwei Wegen: Einmal, indem wir nachweisen, daß tatsächlich die betreffende Methode das leistet, was wir von ihr verlangen, und zweitens, indem wir zeigen, daß die bis jetzt gefundenen richtigen Gesetze sich durch die Methode ergeben und ergeben haben. Dabei wird dann im III. Kapitel die Anwendung auf die Geometrie den Hauptprüfstein bilden.

Da erhebt sich nun die Frage, wenn dieses Problem im wesentlichen für die Geometrie gelöst werden soll, warum beschränken wir uns nicht auf dieses Gebiet und lassen die übrigen Anwendungen der Mathematik auf die Wirklichkeit aus dem Spiele? Die Antwort ist, weil dies nicht möglich zu sein scheint. Wenn wir das Problem allgemein angreifen, ist unser Blick ein wesentlich freierer, und zeigt uns einfachere Beispiele für unsere Untersuchung, als dies bei den teilweise nicht ganz einfachen Verhältnissen der Geometrie möglich ist. Im übrigen wird das vorliegende Kapitel zeigen, daß diese Untersuchung auch für die übrigen Teile der angewandten Mathematik beachtenswerte Resultate liefert.

Im Anschlusse hieran sei noch wie schon im Vorwort kurz darauf hingewiesen, daß wir keine allgemeineren Betrachtungen, die sich auf die Grundlagen der Erkenntnistheorie beziehen, im folgenden einfügen werden, sondern uns hier lediglich auf der Linie unserer streng methodischen Untersuchung bewegen werden. —

Bevor wir jedoch unserer Untersuchung uns zuwenden, müssen wir einen kurzen, vorläufigen Blick werfen auf Untersuchungen früherer Autoren. Der erste, der, wie es scheint, die genannten Probleme scharf erkannte und klar zum Ausdrucke brachte. war Herr F. Klein. Zunächst in der bekannten Vorlesung „Anwendung der Differential- und Intregalrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien"[1], und besonders in dem „Auszug aus dem Gutachten der Göttinger philosophischen Fakultät betreffend die Beneke-Preisausgabe für 1901"[2]. Hier handelt es sich ganz direkt um den Zusammenhang zwischen der mathematischen (i. e. logischen) Konstruktion und der Außenwelt, um die Berechtigung der Näherungsmethoden, um die Feststellung des Genauigkeitsgrades, lauter Fragen, welche die Grundprobleme der Untersuchungen dieses Kapitels bilden werden. F. Klein bezeichnet dort diese Fragestellung als den eigentlichen Mittelpunkt der

[1] Ausgearbeitet von C. Müller (S. S. 1901). Autograph. Vorl. Leipzig 1907.

[2] Math. Ann. 55 (1902) p. 143—148.

angewandten Mathematik. Da wir im folgenden noch eingehender auf die Resultate F. Kleins sowie anderer Autoren in der genannten Richtung einzugehen haben werden, so mag der vorstehende Hinweis auf diese, wie es scheint erste deutliche Formulierung und Untersuchung unserer Probleme für jetzt genügen.

## § 2. Zur Logik.

Da wir uns im folgenden gelegentlich auf einige Resultate der neueren logischen Forschungen in der Mathematik zu beziehen haben werden, so sei es gestattet, hier einige derselben kurz und ohne weitere Begründung anzuführen, indem wir gleichzeitig auf die betreffende Literatur verweisen.

Das bedeutendste und umfassendste Resultat dieser Forschungen, auf das wir schon in § 1 des 1. Kapitels hingewiesen haben, ist das „Prinzip der logischen Abbildung" verschiedener Wissenschaften aufeinander, d. h. die Erkenntnis, daß der „logische Zusammenhang" eines wissenschaftlichen Aufbaues etwas ist, das verschiedene, gänzlich heterogene Wissenschaften miteinander gemeinsam haben können[1], und das daher für sich herausgearbeitet werden kann, und so

[1] Siehe meinen Aufsatz Jahrber. d. d. Math. Vergg. 14 (1905) p. 581. Der erste, der, wie es scheint, die ungeheure Fruchtbarkeit dieses Prinzips erkannte, ohne es allerdings meines Wissens explizit auszusprechen, war F. Klein in seinem bekannten „Erlanger Programm" (Erlangen, Deichert 1872). Von da ab findet das Prinzip immer allgemeinere Anwendung in Mathematik und mathematischer Physik (wo es unter dem Namen des „Analogieprinzipes" verwendet wurde, siehe hiezu A. Voß, Enz. d. Math. IV. 1, p. 20, Anm. 30 und Text). Eingehender wurden die betreffenden Verhältnisse behandelt für die mathematische Physik von W. v. Dyck, „Über die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und angewandten Mathematik", München 1897; sowie für die Geometrie von J. Wellstein, „Enzyklopädie der Elementar-Mathematik II. 1905. Schließlich sei noch auf einschlägige Bemerkungen bei G. Hessenberg („Über die kritische Mathematik", Arch. Math. Phys. 1904), sowie bei M. Pasch (Vorlesungen über neuere Geometrie 1882, p. 98) verwiesen. Im übrigen siehe die eingehenden Darlegungen in meinen „Grundlinien", Kap. I.

eine selbständige Existenz führen kann. Wir nennen jede Wissenschaft, welche einen solchen logischen Zusammenhang aufweist, sobald wir sie als losgelöst von der speziellen Bedeutung der in ihr vorkommenden speziellen Begriffe betrachten, ein logisches Gebäude.

Wir haben schon im 1. Kapitel von logischen Gebäuden gesprochen, z. B. die Geometrie des Euklid als ein solches bezeichnet und von gewissen auf der Hand liegenden Eigenschaften solcher Gebäude Gebrauch gemacht. Alle unsere weiterfortgeschrittenen theoretischen Wissenschaften bestehen in ihrem logischen Teile aus solchen logischen Gebäuden und es ist daher von Wichtigkeit, uns über einige dabei auftretende Eigenschaften Klarheit zu verschaffen, sowie insbesondere auch strenger gefaßte Begriffe zu erhalten.

Im voraus bemerken wir, daß ein logisches Gebäude besteht: 1. aus Begriffen, die wir hier allgemein als „Terme" bezeichnen wollen, 2. aus Verknüpfungen solcher, die wir als „Relationen" bezeichnen wollen.

Definition: Sind zwei Terme durch eine Relation verknüpft, so nennen wir das eine Aussage.

Definition: Ist eine Aussage $B$ die „logische Folge" einer anderen Aussage $A$, so schreiben wir diese Relation zwischen den beiden Aussagen in der Form $A < B$ und lesen das: $A$ hat zur Folge $B$.

Diese Relation gehorcht folgenden Relationsgesetzen, die wir nun als ihre Axiome anschreiben:

1. $(A < B)\ (B < C) < (A < C)$, wobei das einfache Nebeneinandersetzen der beiden Klammern (die logische Multiplikation) die gleichzeitige Geltung der beiden Klammerinhalte bedeutet.

2. Es gilt stets: $A < A$.

Aus der Relation der „Folge" können wir die Relation der „Ersetzbarkeit" (die gewöhnlich als „Gleichheit" bezeichnet wird) definieren.

$$\left.\begin{array}{l}(A<B)\,(B<A)<(A=B)\\ (A=B)<(A<B)\,(B<A)\end{array}\right\}[1]$$

d. h. in einem logischen Gedankengang (der ja aus kontinuierlichen Reihen von lauter „Folgen" besteht), können wir zwei Aussagen, die durch die Relation „=" verknüpft sind, stets für einander setzen, wo sie auch vorkommen, denn, wenn ich $A$ an die Stelle von $B$ setze, so kann ich mir wegen der Definition stets folgende drei Glieder an Stelle von $B$ in die Reihe der Folgen eingesetzt denken: ... $<B<A<B<$ ... d. h. wenn ich $A$ an die Stelle von $B$ setze, so wird nie etwas falsch, da ich ja nach der Definition von „=" sowohl vor $A$ als nach $A$ ein $B$ in die Folgenreihe eingeführt denken kann, wodurch alles beim alten bleibt.

Definition: Die Gesamtheit zweier durch eine Folge verknüpfter Aussagen oder Aussagengruppen heiße ein Satz.

Definition: Die Gesamtheit aller Sätze, die sich logisch aus einer gegebenen Gruppe von Sätzen ableiten lassen, bilden zusammen mit dieser Gruppe ein logisches Gebäude.

Definition: Wird durch Gleichsetzung ein neuer Term (der in der bisherigen Folgenreihe eines logischen Gebäudes noch nicht vorhanden war) eingeführt und ist unter den Termen der rechten Seite der Gleichsetzung keiner, der nicht schon vorher in dem logischen Gebäude vorgekommen wäre, so heißen wir einen solchen Satz eine Definition.

Z. B. Definition von $A$:

$$(X=A)=(X \text{ hat die und die Eigenschaften}).$$

Anm. Die Gleichsetzung liegt in $(X=A)$ vor. Der neue Term $A$, den man auch „Begriff" nennen kann, ist gleichgesetzt einer längeren Beschreibung eines Dinges; die Definition ist also lediglich eine Abkürzung. Von einem solchen Begriffe $A$ wollen wir sagen, er sei ein abgeleiteter Begriff, abgeleitet aus den anderen Begriffen, die zu seiner

[1] Wir schreiben hier beide Zeilen getrennt an (nach Vorgang von E. Schröder), um nicht das Zeichen „=" in seiner eigenen Definition verwenden zu müssen.

Definition dienten. Wir werden auch hier gelegentlich von „logisch abgeleiteten Begriffen" sprechen, um später den Gegensatz zur Empirie herauszuheben.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß man alle abgeleiteten Begriffe aus einem logischen Gebäude entfernen kann, indem man an ihre Stelle die linken Seiten ihrer Definitionen einsetzt.

Def. Jeder andere Satz des logischen Gebäudes, welcher nicht durch logische Schlüsse aus den ihm vorhergehenden abgeleitet werden kann, heißt ein Axiom[1].

Schließlich wollen wir nur noch hinweisen darauf, daß sich das bezüglich der logischen Gebäude Gesagte direkt auch auf die Mathematik überträgt. Sehen wir davon ab, daß gewisse mathematische Ausdrücke gewisse geometrische Gebilde, daß gewisse Zeichen der Mathematik Anzahlen oder ähnliches bedeuten, dann stellt irgendeine mathematische Ableitung ein rein logisches Gebäude, ein Stück der reinen Logik dar. Ebenso können wir umgekehrt, was noch wichtiger ist, für irgendeinen logischen Zusammenhang häufig eine mathematische Form finden. Damit haben wir für unsere folgenden Untersuchungen den Vorteil gewonnen, daß alles, was in unseren Wissenschaften Zutat unseres Verstandes ist, was in ihnen Formales enthalten ist, sei es nun, daß es in mathematischer oder syllogistischer Form auftrete, nötigen-

[1] So etwa gelingt es, die beiden Begriffe Axiom und Definition genau gegeneinander abzugrenzen, so daß beide ungefähr die Bedeutung erhalten, die man ihnen gewöhnlich beizulegen pflegt. Herr Frege hat bekanntlich (Jahresbericht d. d. Math. Vergg. 12 [1903]) gesagt, daß Herr Hilbert in seinen „Grundlagen" diese beiden Begriffe nicht genügend auseinander gehalten habe. Wie wir oben sahen, ist das lediglich Festsetzungs- und Definitionssache, kann also nie irgendeinen logischen Fehler involvieren. Herr Frege verquickt sodann aber etwas die Begriffe der logischen Definition und der empirischen Bedeutung eines Begriffes in seinem Beispiele von der „Taschenuhr". Man befand sich bisher überhaupt in Unklarheit bezüglich des Verhältnisses, in dem eine exakte Wissenschaft zu ihrer Anwendung in der Wirklichkeit steht. Eben dieses Verhältnis soll in der vorliegenden Abhandlung einmal gründlich untersucht werden.

falls in einen einzigen, umfassenden Begriff zusammengefaßt werden und als ein homogenes Ganzes behandelt werden kann[1].

## II. Abschnitt: Übersicht über das allgemeine Problem.

### § 3. Erklären und Beherrschen.

1. Es soll also festgestellt werden, wodurch es uns gelingt, die exakten Wissenschaften, worunter wir eben diejenigen verstehen, bei denen Mathematik in irgendeiner Form auf die Wirklichkeit angewendet wird, in der Weise, wie wir dies tatsächlich vor uns sehen, aufzustellen; d. h. es soll untersucht werden, woher die Sicherheit kommt, mit der wir in so vielen Fällen das Eintreffen unserer mathematischen (logischen) Schlüsse in der Wirklichkeit erwarten, wie groß diese Sicherheit ist, und auf welche Gebiete sie sich erstreckt.

2. Zu diesem Zwecke werden wir jedoch nicht ins Blaue hinein irgendwelche Theorien konstruieren, sondern wir werden uns stets an den wirklichen Verhältnissen zu orientieren haben. Diese sollen uns die Richtung unserer Forschung angeben.

3. Um nun an die genannte Aufgabe heranzutreten, müssen wir zunächst feststellen, was die Gesamtheit der exakten Wissenschaften (die wir künftig als „die Wissenschaft" bezeichnen werden) eigentlich soll. Nur wenn wir bestimmte Ziele haben, können wir auch bestimmte Wege einschlagen.

Da wir bisher noch nichts weiter festgesetzt haben, müssen wir uns der allgemeinen konventionellen Ausdrucksweise einstweilen bedienen. In diesem Sinne sagen wir, daß die Wissenschaft die folgenden beiden Aufgaben hat:

[1] Die formale Mathematik als einen Teil der formalen Logik behandelt sehr ausführlich Herr Bertrand Russell in seinem grundlegenden Werke „The principles of Mathematics", Cambridge 1903.

a) Bestehendes zu erklären, verständlich zu machen. Es ist dies eine mehr geistige Aufgabe.

b) Die Wirklichkeit wirklich zu beherrschen, d. h. in der Wirklichkeit bestimmte Dinge, die bisher noch nicht da waren, wirklich herzustellen. Dies ist eine Aufgabe, die man zunächst als mehr praktisch bezeichnen könnte.

4. Erklären und beherrschen, das sind also, wie wir uns zunächst ausdrücken wollen, die beiden großen Aufgaben der Wissenschaft. Wir werden später mit präziseren Begriffen auch bessere Namen dafür haben. Diese beiden Aufgaben umfassen alles, da sie sich einerseits mit dem beschäftigen, was bereits vorhanden ist, andererseits mit dem, was erst entstehen soll. Wir werden zu untersuchen haben, welche Wege die Wissenschaft einschlagen muß, um zur Lösung der beiden Aufgaben zu gelangen.

5. Es ist klar, daß diese uns gestellte Aufgabe uns auf Fragen führt, welche zum Teil die Philosophie seit langen Zeiten behandelt hat, ohne überall zu vollständigen und endgültigen Lösungen zu gelangen. In neuerer Zeit sind es neben Philosophen dann Vertreter der exakten Wissenschaften und hauptsächlich auch der Mathematik gewesen, welche ihrerseits diese Lösungen wesentlich gefördert haben. Ehe wir also unsere eigenen Untersuchungen beginnen, wollen wir in aller Kürze auf einige Hauptrichtungen der bisherigen Forschung hinweisen, während wir uns eine eingehendere Würdigung insbesondere der moderneren Literatur auf das Ende dieses Kapitels versparen.

## § 4. Historisches.

1. Wir können in diesem Paragraphen natürlich nicht im Detail die Entwicklung unseres Problems zur Darstellung bringen. Wir müssen uns auf die Charakterisierung einiger größerer Forschergruppen beschränken, die bestimmten Forschungsrichtungen folgten, indem wir die Hauptvertreter anführen.

2. Fragte man sich nach der Art, wie wir unsere Wissenschaften aufbauen, so zeigte sich einmal in der Geometrie, der Mechanik, der Astronomie usw., daß es Wissenschaften gebe, in denen wir die Wirklichkeit so gut beherrschten, daß wir den Erfolg bestimmter Handlungen unsererseits voraussagen konnten, und dies mit einer derartigen Genauigkeit, daß, je sorgfältiger wir diese Handlungen ausführten, desto genauer die Natur unseren Vorhersagungen folgte. Andererseits galt es in den Teilen der Wissenschaft, welche gerade noch in frischer Bearbeitung waren, als sicher, daß es da kein anderes zuverlässiges Mittel gab, um Kenntnisse über die Wirklichkeit zu erhalten, als das reine vorurteilslose Experiment.

3. Diesen beiden Umständen gemäß können wir in erster Annäherung zwei sich direkt entgegenstehende Meinungen über unser Problem in der Geschichte aufweisen: Einmal die Meinung der, wie wir sie kurz nennen wollen, „Idealisten", welche wesentlich auf Grund der ersten beiden genannten Beobachtungen nachzuweisen versuchten, daß es der Mench oder aber seine ihm anhängende Betrachtungsweise der Wirklichkeit sei, welche die Gesetze der Wirklichkeit bedinge, und sie damit der Wirklichkeit vorschreibe. Dieser Meinung stand entgegen diejenige der „Experimentalisten", welche sich auf die ungeheure Menge von Tatsachen stützten, die wir in unserer zweiten Beobachtung andeuteten. Sie waren der Ansicht, daß uns nichts übrigbleibe, als einfach durch Experimente der Natur ihre Gesetze abzufragen.

4. Es ist verständlich, daß die Mehrzahl der Idealisten Männer waren, welche der experimentellen Forschung ferner standen. So hatte und hat diese Meinung noch ihre Hauptvertreter unter den Philosophen. Als Hauptvertreter wollen wir (cum grano salis genommen) I. Kant anführen. Die andere Meinung herrschte und herrscht naturgemäß unter jenen Forschern hauptsächlich, welche sich mit der experimentellen Erforschung der Wirklichkeit beschäftigen, d. h. unter den Naturforschern jeder Art. Als ihren Hauptver-

treter wollen wir H. Helmholtz nennen. Die Theorie dieser Ansicht behandelte von philosophischer Seite J. St. Mill.

5. Neuerdings hat sich nun eine zwischen den beiden genannten vermittelnde Ansicht große Beachtung erworben. Wir meinen diejenige Wissenschaftslehre, welche von Ernst Mach aufgestellt wurde und vertreten wird. Machs Sympathien stehen in dem Widerstreite der beiden genannten Forschergruppen mehr auf Seiten der Experimentalisten. Daß er selbst aber keineswegs zu ihnen gehört, zeigt ein kurzer Blick auf seine Theorie. Mach sagt, daß es Aufgabe der Wissenschaft sei, die Natur zu beschreiben und zwar auf einfachste Weise. Da nun diese Beschreibung durch das stattfindet, was man gewöhnlich als Naturgesetze bezeichnet, so zeigt der Zusatz von der „einfachsten" Beschreibung, daß es also nicht nur auf die reine Beobachtung der Natur ankommt, sondern daß noch andere Momente hier mitspielen. Ebenso entfernt sich Mach in einem anderen Punkte von den Experimentalisten. Um nämlich den im ersten Beispiele von Nr. 2 genannten Umständen in seiner Theorie Rechnung zu tragen, schafft er den Begriff des „Gedankenexperimentes". Mach sagt nämlich, unser Geist „passe sich der Wirklichkeit immer mehr an". Hinreichende Anpassung erlaubt uns dann, im Geiste „Experimente zu machen", deren Resultat wir dann in der Wirklichkeit bestätigt finden — sogenannte Gedankenexperimente. Es ist klar, daß ein derartiges richtiges Voraussagen noch nie gesehener Dinge in der Wirklichkeit der rein experimentalistischen Ansicht widerspricht.

6. Das außerordentliche Verdienst Machs in dem Gebiete der Wissenschaftslehre ist das, daß er der erste war, der vorurteilslos allen Erscheinungen, die die Wissenschaft aufweist, insbesondere also auch beiden in Nr. 2 genannten Umständen gleichzeitig Rechnung zu tragen versuchte[1]. Er war, wie es scheint, der erste, dem es gelang, eine Theorie

[1] s. hiezu auch H. Cornelius, Einleitung in die Philosophie, 1903 p. 167. 168.

aufzustellen, in der wirklich die verschiedenen vorhandenen Erscheinungen an der Wissenschaft unter eine Gruppe weniger fundamentaler Ideen subsumiert waren, und wird sich so immer den Namen eines Bahnbrechers auf diesem Gebiete bewahren. Wir werden auf mehrere dieser Ideen noch näher zu sprechen kommen.

7. Unsere Fragen aber, mit denen wir uns jetzt beschäftigen müssen, werden sein: wie kommt einerseits die voraussagende Beherrschung der Wirklichkeit in der Geometrie etc., wie die experimentelle Beherrschung in der Naturforschung zustande, und wie lassen sich beide vereinigen?

## § 5. Der Identitäts-Satz.

1. Die Gesamtheit des uns in äußerer Wahrnehmung gegebenen bezeichnen wir als „die Wirklichkeit".

2. Wir konstatieren die Tatsache, daß wir in der Wirklichkeit „Veränderungen" wahrnehmen.

3. Wir konstatieren die Tatsache, daß wir in der Wirklichkeit „Konstanzen" wahrnehmen, d. h. „Gleichbleibungen" im Gegensatze zu Veränderungen.

4. Wir unterscheiden „räumlich verschiedene Gebiete" in der Wirklichkeit.

5. Das in einem gewissen Gebiete der Wirklichkeit Wahrgenommene bezeichnen wir als „Vorgang". Bem.: Die vorstehenden Nummern sollen lediglich der Verständlichmachung dienen. Die darin enthaltenen Begriffe können, wie sofort einleuchtet, nicht logisch definiert werden.

6. Jeden Teilvorgang eines Vorganges nennen wir einen Umstand des betreffenden Vorganges.

7. Ändern (variieren) wir einen Umstand eines Vorganges, und ändert sich hierdurch der Vorgang selbst, dann nennen wir den betreffenden Umstand einen „wesentlichen Umstand" oder eine „Bedingung des Vorganges", andernfalls einen „unwesentlichen Umstand".

8. Dieses Aufsuchen der wesentlichen Umstände ist nach

Nr. 6 und 7 ein „Zerlegen" des Vorganges in Teilvorgänge. Diese brauchen zunächst unter sich nicht unabhängig zu sein, aber stellen in ihrer Gesamtheit den Vorgang dar. Wir können diese Tatsachen und Begriffsbildungen in eine im Gebrauche sehr handliche Formel bringen, indem wir sagen: Ein Vorgang ist identisch mit der Gesamtheit seiner wesentlichen Umstände. Statt „wesentliche Umstände" können wir auch sagen „Bedingungen".[1]

9. Der Satz unter Nr. 2 hat nun weitreichende Konsequenzen. Die wichtigste liegt im folgenden Satze:

Gelingt es uns die gleichen Bedingungen herzustellen, dann haben wir ohne weiteres auch den gleichen Vorgang.

Der Satz also, daß unter gleichen Bedingungen das gleiche in der Wirklichkeit eintritt, der früher als eine Erfahrungstatsache betrachtet wurde und dadurch unsicher blieb, ergibt sich durch unsere Überlegung als eine Selbstverständlichkeit.

---

[1] Man überlegt sich leicht, daß diese Definition von „Bedingungen" dem Worte die gleiche Bedeutung gibt, die es gewöhnlich besitzt. In der Tat sind das, was wir für gewöhnlich als „Bedingungen" eines Vorganges bezeichnen, Teilvorgänge des betreffenden Vorganges. Nur ist dabei auf einen Punkt hinzuweisen. Meist stellt man sich nämlich unter „Bedingung" einen konstanten Umstand vor. Lauter konstante Umstände können aber natürlich keinen variabeln Vorgang hervorbringen. Und in Fällen, wo es dennoch so scheinen möchte, ist immer die letzte (auslösende) Bedingung mindestens ein solcher variabler Vorgang. Es ist diese Vorstellung also unrichtig, und, wie es scheint die hauptsächlichste Veranlassung zur Bildung vieler Scheinprobleme bezüglich der sog. „Kausalität". Wenn wir uns dagegen wie im Texte überlegen, daß Bedingungen einfach Teilvorgänge sind (wir fassen ja sowohl konstante als nicht konstante, variable Umstände unter dem Worte „Vorgang" zusammen, siehe die Definition dieses Wortes), dann ist es selbstverständlich, daß ein variabler Vorgang auch variable Teilvorgänge, d. h. Bedingungen haben muß. Es gelingt auf keine Weise diese Variabilität zuerst wegzueskamotieren und dann hinterher mittels der Kausalität wieder einzuführen. Siehe zu dieser letzten Bemerkung auch manche vorzügliche Ausführungen ähnlicher Art bei H Cornelius „Einleitung in die Philosophie" 1903. in § 23.

10. Dieser Satz von Nr. 9 ist es aber, der uns erst ein wirkliches Beherrschen der Wirklichkeit erlaubt, ein solches erst als möglich begründet — allerdings ein bisher rein experimentelles Beherrschen. Denn, kenne ich von einem Vorgange seine wesentlichen Umstände, dann brauche ich diese bloß herzustellen, um den Vorgang mit aller Sicherheit zu wiederholen in der Wirklichkeit.

11. Das experimentelle Vorgehen beim Aufsuchen der Bedingungen eines Vorganges ist dabei folgendes:

Ich nehme einen Umstand des Vorganges und variiere ihn. Ändert sich dadurch der Vorgang, dann ist es ein wesentlicher Umstand, ändert er sich nicht, ist der Umstand unwesentlich. Stelle ich andererseits die Gesamtheit der mir bekannten wesentlichen Umstände her, und finde, daß der Vorgang eintritt (nämlich gleichzeitig mit dem letzten wesentlichen Umstande), dann sehe ich, daß ich alle wesentlichen Umstände berücksichtigt habe. Tritt der gewünschte Vorgang nicht ein, so sehe ich, daß ich nicht alle wesentlichen Umstände berücksichtigt habe[1].

12. Wir werden nun einen neuen Ausdruck einführen. Sowie nämlich die geistige Seite der Forschung nach dem Instrumente, mit dem wir sie ausführen, dem Logos, als logische bezeichnet wird, so wollen wir die rein experimentelle Seite der Forschung, nach dem Instrumente, mit dem sie ausgeführt wird, der manus, als manuelle bezeichnen.

13. Wir können nun das Ergebnis des aufgestellten Satzes, des Identitätssatzes, wie wir ihn kurz nennen wollen, kurz dahin zusammenfassen, daß wir sagen: Der Identitätssatz enthält die Begründung der ganzen manuellen Forschung.

Jetzt nämlich ist es leicht einzusehen, warum alle gleich-

[1] Siehe hierzu und zum ganzen Paragraphen die schönen Ausführungen W. Ostwalds über Theorie und Praxis in „Die Forderung des Tages“ p. 131 f.

angestellten Experimente die gleichen Resultate liefern müssen. Insbesondere hat auch die, wie wir sie nennen wollen, Kausalität des täglichen Lebens nichts Wunderbares mehr. Diese letztere kann man nämlich etwa so kennzeichnen: Von einem Vorgange sind alle seine Bedingungen etwa bis auf eine gegeben. Tritt dann diese letzte Bedingung hinzu, dann ist der Vorgang gegeben. Im täglichen Leben bezeichnet man nun meist die vorhandenen Bedingungen als „Ursachen", die letzthinzutretende Bedingung etwa als „Anlaß". Der Vorgang selbst wird dann schließlich als „Wirkung" bezeichnet. Es ist klar, daß diese Art von Kausalität auf Grund des Identitätssatzes nichts Wunderbares mehr hat.

14. Man könnte im Gegensatze zu der Kausalität des täglichen Lebens von einer „wissenschaftlichen Kausalität" sprechen, indem man darunter funktionelle Abhängigkeiten oder Beziehungen von irgendwelchen Dingen oder Größen der Wirklichkeit versteht. Doch liegt eigentlich gar kein Zwang vor, dies als Kausalität zu bezeichnen, da wir ja einen guten wissenschaftlichen Terminus dafür haben in dem Worte „Funktion"[1].

## § 6. Entwickelung in Reihen.

1. Nachdem im vorigen Paragraphen die Möglichkeit der manuellen Forschung sichergestellt wurde, können wir uns jetzt der logischen oder mathematischen Verarbeitung derselben zuwenden. Zur Vorbereitung auf die weiteren Ausführungen seien in diesem Paragraphen anknüpfend an eine Analogie einige Begriffe abgeleitet.

2. Denken wir uns eine sonst beliebige periodische Funktion gegeben, $y=f(x)$, deren Periode etwa gleich $2\pi$ sei, und welche den „Dirichletschen Bedingungen" genügt, und stellen wir uns die Aufgabe, diese Funktion in eine

---

[1] **E. Mach hat in seinen Schriften, wohl als erster den Satz aufgestellt, daß alle Kausalität funktionelle Abhängigkeit sei. Siehe „Erkenntnis und Irrtum", Leipzig 1905, p. 274 Anm. und auch im Text.**

Fouriersche Reihe zu entwickeln. Sei diese Entwickelung ausgeführt, dann bezeichnen wir:

$$f_n(x) = b_0 + \sum_1^n a_k \sin kx + \sum_1^n b_k \cos kx$$

als die $n$-te Näherungsfunktion von $f(x)$. Die Kurve $y = f_n(x)$ bezeichnen wir als die $n$-te Näherungskurve der Kurve $y = f(x)$.

3. Bekanntlich ist diese Entwickelung eine eindeutige, und man kann die Koëffizienten $a_i$ und $b_i$ der unendlichen Reihe $f(x)$ alle auf einmal berechnen. Jedoch ist es auch möglich, die gleichen sukzessiven Näherungfunktionen $f_n(x)$, welche die allgemeine Entwickelung liefert, durch Anwendung eines bestimmten Prinzipes einzeln zu erhalten. Dieses Prinzip besteht, wie zuerst Bessel[1] gezeigt hat, darin, daß ich, um die Koëffizienten meiner $n$-ten Näherungsfunktion zu erhalten, dieselben so bestimme, daß die Summe der Quadrate der einzelnen Ordinatendifferenzen zwischen der gegebenen und der Näherungsfunktion (d. h. der „Fehler") ein Minimum wird[2].

4. Bezeichnen wir nun einmal die Tätigkeit der Entwickelung von $f(x)$ in eine Fouriersche Reihe nach der letzteren Methode als „Erklären dieser Funktion", so können wir folgende Bemerkung machen. Bin ich in meiner sukzessiven „Erklärung" von $f(x)$ bis zur $n$-ten Näherungsfunktion gelangt, und bemerke, daß diese Näherungsfunktion die $f(x)$ noch nicht völlig darstellt, dann sage ich deshalb noch nicht, daß meine bisherige Annäherung „falsch" sei, sondern ich verbessere meine Erklärung dadurch, daß ich zu der $n$-ten Näherungsfunktion noch ein Glied hinzufüge, gemäß dem angewandten Prinzipe, welches dann die Fehler verringern wird. Und auf die gleiche Weise fahre ich fort.

---

[1] Königsberger Beobachtungen 1, 1815 (ges. Abh. 2, p. 24). Zitiert nach H. Burkhardt, Entwickelungen nach oszillierenden Funktionen I, p. 231.

[2] s. hiezu auch C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen, Samml. Schubert XXXII. 1904.

Diesen Vorgang, den wir also so etwa beschreiben können, daß bei der Entwickelung einer Funktion in eine Reihe nach einer Anzahl von Schritten, welche das gewünschte Resultat noch nicht ergeben, das bisherige nicht als falsch verworfen, sondern im Gegenteil dadurch aufrecht erhalten wird, daß man eben die weiteren Glieder so bestimmt, daß sie den Fehler verringern — diesen Vorgang wollen wir als den Vorgang der Exhaustion bezeichnen, und das Prinzip nach dem er vorgenommen wird, das Exhaustionsprinzip[1].

5. Wir können nun dieses in eine Reihe Entwickeln einer Funktion in zweierlei Weise auffassen: Einmal können wir uns die zu entwickelnde Funktion als vorgegeben denken, und wir suchen dann nach der Reihe der Glieder ihrer Entwickelung. Das anderemal können wir durch sukzessives Zusammenfügen von Gliedern eine Funktion entstehen lassen, deren Entwickelung dann eben die so hergestellte Reihe ist. Diese beiden Aufgaben wollen wir ihrem Wesen nach als Analyse und Synthese solcher Funktionen bezeichnen.

6. Die Funktionen const., $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$ usw. wollen wir als die Elementarfunktionen unserer Entwickelung bezeichnen.

7. Man kann sich nun die Frage stellen, wie ist es mit der Entwickelung unserer vorgegebenen Funktion nach anderen Funktionen als den Elementarfunktionen? Dabei wollen wir den Begriff der „anderen Funktionen" geeignet einschränken.

Bezeichnen wir die Elementarfunktionen von Nr. 6 der Reihe nach durch $E_i(x)$, so daß $E_0(x) = \text{const}$, $E_{2k-1}(x) = \sin kx$; $E_{2k}(x) = \cos kx$, dann soll eine Funktion $G(x)$ als „durch die $E_i(x)$ endlich darstellbar" bezeichnet werden, wenn sie sich durch eine Summe von endlich vielen mit Zahlenkoëffizienten versehenen $E_i(x)$ darstellen läßt. Beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die Gesamtheit $\Gamma$ der durch die $E_i(x)$ endlich darstellbaren Funktionen.

[1] Es ist ja in der Tat ein allmähliches „Ausschöpfen" der Funktion mittels einfacherer Funktionen.

Dann lassen sich aus $\Gamma$ derartige Reihen von Funktionen $G_i(x)$ auswählen, daß auch die $E_i(x)$ durch die $G_i(x)$ endlich darstellbar sind, und damit auch jede andere beliebige Funktion $G(x)$ aus $\Gamma$. Es könnte also eine solche Reihe von $G_i(x)$ als Reihe von Elementarfunktionen benutzt werden, wie oben die $E_i(x)$ so benutzt wurden, um andere Funktionen nach ihnen zu entwickeln.

Aber, und das ist das hier für uns wichtige, unter allen diesen verschiedenen Reihen von Funktionen $G_i(x)$ aus $\Gamma$, die als Elementarfunktionen dienen könnten, gibt es eine, welche die „einfachste" ist. Man merkt dies, wenn man die Kurven graphisch aufzeichnet. Die einfachsten Elementarfunktionen sind, wie man etwa sagen könnte, die, welche die wenigsten speziellen Eigentümlichkeiten aufweisen[1], es sind die Funktionen $E_i(x)$ der Nr. 6.

In diesem Falle also, wenn die $E_i(x)$ die einfachsten Elementarfunktionen sind, wird man alle Entwickelungen nach irgend welchen anderen der obigen Funktionen $G_i(x)$ in solche nach $E_i(x)$ umwandeln können, und so für alle Funktionen, die entwickelt werden sollen, eine einheitliche Darstellung mittels derselben Elementarfunktionen erhalten, wobei dann diese Elementarfunktionen selbst nicht mehr in einfachere Elementarfunktionen zerlegt werden können.

## § 7. Die Elementarvorgänge.

1. Nachdem wir in den beiden vorstehenden Paragraphen die nötigen Vorbereitungen getroffen haben, wollen wir zunächst einmal in großen Zügen die Methode darlegen, nach der die wissenschaftliche[2] Forschung ihre Aufgaben allen Anforderungen entsprechend erledigen kann (was dann

[1] welche also z. B. in einer Periode nur ein Maximum und Minimum aufweisen usw. Wir können hier die zur völligen Aufstellung des Begriffes „einfachst" nötigen Untersuchungen nicht durchführen, da für den momentanen Zweck das Obige genügt. Wir behalten uns jedoch vor, darauf zurückzukommen.

[2] Siehe Kapitel II, § 3, No. 3.

im folgenden im einzelnen zu begründen sein wird) und auch nachweislich erledigt. Wir ziehen diesen Weg dem induktiven vor, da er unsere Darlegungen sehr abkürzt, und sogleich das Ziel ganz erkennen läßt, welchem unsere Untersuchung zuzustreben hat.

Wir wollen diese Darlegungen unmittelbar an die Ausführungen des letzten Paragraphen anschließen. Dann lautet diese Methode folgendermaßen:

2. Ebenso, wie bei den Funktionen unser Wille auf Analyse und Synthese gerichtet war, so ist er in der Erforschung der Wirklichkeit (wie in § 3 dieses Kapitels dargelegt) auf Erklären und Beherrschen gerichtet. Bei den Funktionen wird dieser Zweck erreicht durch die Elementarfunktionen, durch Zerlegung einer vorgegebenen Funktion in Elementarfunktionen erhalten wir die Analyse, durch Zusammensetzen von Elementarfunktionen die Synthese. In der Wirklichkeit wird der genannte Zweck erreicht durch die Elementarvorgänge: durch Zerlegen eines vorgegebenen Vorganges in Elementarvorgänge wird derselbe erklärt (wir wollen diese Tätigkeit künftig auch hier als Analyse bezeichnen), durch Zusammensetzen von Elementarvorgängen werden neue Vorgänge in der Wirklichkeit hergestellt (wir wollen diese Tätigkeit künftig auch hier als Synthese bezeichnen), und so das erreicht, was wir als Beherrschung der Wirklichkeit bezeichneten.

Wir können also einstweilen als Zweck dieser bisher hypothetischen Elementarvorgänge angeben: Ich will nach ihnen vorhandene Erscheinungen (= Vorgänge) zerlegen, aus ihnen noch nicht vorhandene Vorgänge zusammensetzen.

3. Die ganze Begründung der in der vorigen Nummer genannten Methode wird also darin bestehen müssen, daß wir, wie man sagt, die „Existenz" dieser Elementarvorgänge nachzuweisen haben. Und dieser Nachweis wird darin bestehen müssen, daß wir die Fragen beantworten:

a) Können Vorgänge überhaupt in andere zerlegt oder aus anderen zusammengesetzt werden durch manuelles Vorgehen;

b) wie unterscheidet sich ein Elementarvorgang von einem Nichtelementarvorgang, d. h. wie wird ein Elementarvorgang als solcher definiert;

c) wie werden Elementarvorgänge manuell hergestellt;

d) wie geschieht die Anknüpfung der Logik und Mathematik an die Elementarvorgänge und damit an die Wirklichkeit; ferner wie verhält sich die Anknüpfung bei dem Operieren mit Elementarvorgängen, d. h. bei den Tätigkeiten der Analyse und Synthese.

4. Die Frage a läßt sich auf Grund des Identitätssatzes unmittelbar beantworten.

Da nach diesem Satze jeder Vorgang identisch ist mit der Gesamtheit seiner wesentlichen Umstände oder seiner Bedingungen, so können wir einen Teil dieser Umstände selbst wieder zu einem Vorgange zusammenfassen, und gelangen so zu einem Teilvorgange. Ebenso können wir durch Zusammenfügen der Umstände mehrerer Vorgänge einen Gesamtvorgang synthetisch herstellen.

Wir werden nun später von den „Gesetzen" der Elementarvorgänge sprechen, es sind dies Sätze, die der Logik oder Mathematik angehören. Wir werden sehen, daß überall, wo ein bestimmter Vorgang stattfindet, auch sein Gesetz gilt. So ergibt sich schon hier, ohne daß wir zunächst näheres über diese „Gesetze" wissen, auf Grund der eben gemachten Voraussetzungen:

Können wir einen Vorgang in Elementarvorgänge zerlegen, so gelten für letztere ihre Gesetze. Wir brauchen dann nur die Gesetze dieser Elementarvorgänge geeignet zu vereinigen, um das Gesetz des Gesamtvorganges zu haben, welches dann gilt, weil eben die Teilgesetze gelten. Diese Tätigkeit wollen wir als die „Superposition der Elementarvorgänge" bezeichnen.

5. Wenden wir uns zur Frage b, so gilt folgendes:

Wir wollen für ein bestimmtes Gebiet denjenigen Vorgang als Elementarvorgang auswählen, welcher der einfachste ist. Das Prinzip, nach dem dieser Vorgang aus den anderen Vorgängen ausgewählt wird, wollen wir das Machsche Ökonomieprinzip nennen, da Mach der erste war, welcher dem Prinzipe der Einfachheit in der Wissenschaftstheorie Ausdruck verliehen hat. In gleicher Weise, sahen wir, wurden im vorigen Paragraphen die einfachsten Elementarfunktionen zur Entwickelung in Reihen benutzt.

6. Elementarvorgänge werden hergestellt, um Frage c zu behandeln, indem man diejenigen Vorgänge herstellt, welche die einfachsten Bedingungen haben. Welches diese einfachsten Bedingungen sind, sagt uns das Machsche Ökonomieprinzip.

7. Um schließlich noch Frage d für jetzt zu erledigen, so liefert uns das Machsche Ökonomieprinzip auch die „Gesetze" dieser Elementarvorgänge und damit die Anknüpfung der Logik und Mathematik an die Wirklichkeit. Inwieweit und wie genau diese Gesetze gelten, davon wird uns eine eigene Untersuchung zu unterrichten haben.

Was diese Anknüpfung bei der Analyse und Synthese anlangt, so gibt bereits die obige Bemerkung (Nr. 4) über die Superposition der Elementarvorgänge Aufschluß über den Vorgang bei der Synthese. Bezüglich der Analyse sei folgendes bemerkt: Denken wir uns die Elementarvorgänge manuell herstellbar, und ihre Gesetze bekannt, dann werden wir einen zur Analyse vorgelegten Vorgang in seine Elementarvorgänge zerlegen, ohne diese selbst jedoch einzeln manuell herzustellen. Ihre Gesetze erhalten wir aufrecht in genauer Analogie zum vorigen Paragraphen durch das Prinzip der Exhaustion, indem wir die Gesetze von Elementarvorgängen, welche wir bereits zur Zerlegung benutzten, streng gelten lassen, und den von der Zerlegung übrigbleibenden Teil des Vorganges durch weitere Zerlegung behandeln.

8. Im vorstehenden wurde versucht, soweit das mit den bisher von uns eingeführten Begriffen möglich war, einen kurzen Überblick über einen Teil derjenigen Tatsachen zu

geben, welche im Verlaufe der folgenden Untersuchung sich ergeben werden. Wir dürfen noch kurz die drei Hauptpunkte anführen, um deren Behandlung es sich im folgenden handeln wird, um den Existenzbeweis der Elementarvorgänge zu führen: A. Bestimmung der Elementarvorgänge mit dem Machschen Ökonomieprinzip; B. Ableitung ihrer Gesetze mittels des gleichen Prinzips; C. manuelle Herstellung der Elementarvorgänge in der Wirklichkeit und Übereinstimmung mit der Theorie.

## § 8. Beispiel.

1. Um für unsere folgenden spezielleren Überlegungen einige weitere Gesichtspunkte und Material zur Illustration zu erhalten, wollen wir ein Beispiel behandeln. Wir wollen durch die folgende kritische Analyse eines konkreten Falles der Aufstellung mathematischer Gesetze für die Wirklichkeit auf diejenigen Punkte aufmerksam werden, die nachher für uns von Wichtigkeit sind.

2. Als dieses Beispiel wollen wir die Beleuchtungsvorgänge wählen. Nach dem im vorigen Paragraphen Gesagten werden wir also den oder die Elementarvorgänge zu suchen haben, aus denen es dann rückwärts wieder möglich ist, sämtliche Beleuchtungsvorgänge wieder aufzubauen, wodurch andererseits auch für sämtliche die „Erklärung" gefunden wäre.

3. Zunächst bemerken wir experimentell, daß der Vorgang des Leuchtens als wesentlichen Umstand eines Dinges bedarf, welches leuchtet. Dieses Ding der Wirklichkeit hat eine geometrische Gestalt. Der betreffende Elementarvorgang wird also nach dem Ökonomieprinzip zunächst einmal die einfachste geometrische Gestalt haben, aus der sich alle übrigen solchen Gestalten zusammensetzen lassen. Diese Gestalt ist der Punkt. Wir wissen also zunächst: wir werden den Elementarvorgang eines leuchtenden Punktes zu untersuchen haben.

4. Ferner kann das Leuchten eines Dinges an verschiedenen Stellen sehr verschieden sein. Bei dem Elementarvorgang

wird das Leuchten nicht verschieden sein an verschiedenen Stellen, d. h. es wird keine Unterscheidung möglich sein. Dies ist der einfachste Fall. Wir können also sagen: beim Elementarvorgang des leuchtenden Punktes wird dessen Leuchten nach verschiedenen Seiten nicht unterscheidbar sein.

5. Zum Vorgang des „Beleuchtetseins" eines Dinges der Wirklichkeit gehört ebenfalls als wesentlicher Umstand ein leuchtendes Ding (Lichtquelle). Umgekehrt ausgedrückt: man kann mit einem leuchtenden Dinge einen Gegenstand beleuchten.

Lassen wir insbesondere einen Gegenstand durch unseren Elementarvorgang, den leuchtenden Punkt, beleuchten, so muß auch alles weitere, was dazu für unseren Elementarvorgang noch festzustellen ist, von einfachster Art sein. Insbesondere ist über die Leuchtwirkung unseres „Leuchtpunktes" in die Ferne (was ja beim Beleuchtungsvorgange das Wichtige ist) noch nichts bekannt, darüber läßt sich auch aus dem bisher über den Leuchtpunkt Gesagten (Nr. 3 und 4) nichts entnehmen. Diese von dem bisherigen also unabhängige Eigenschaft scheint noch der näheren Bestimmung zu bedürfen. Auch sie wird natürlich von einfachster Art gewählt werden müssen. Dazu diene folgende Betrachtung:

6. a) Als Gegenstand, der beleuchtet werden soll, legen wir eine Kugel um unseren Leuchtpunkt als Zentrum. Der einfachste Fall ist hier wieder, daß die Beleuchtung aller Innenpunkte der Kugel nicht unterscheidbar sei. Das gleiche soll bei weiteren um den Leuchtpunkt als Zentrum gelegten Kugeln stattfinden.

b) Jede solche Kugel nimmt die ganze Leuchtwirkung des Punktes weg. Wir nennen diese Wirkung des Leuchtpunktes: die Gesamtwirkung des Leuchtpunktes auf die Kugel. Betrachten wir diesen Umstand bei solchen Kugeln von verschiedenem Radius, so ist der einfachste Fall, daß die Gesamtwirkung des Leuchtpunktes auf die Kugeln sich mit Veränderung des Radius nicht ändert. (Wir bemerken, daß der Begriff dieser „Gesamtwirkung" noch in keiner Weise irgendwie vergleichbar oder meßbar definiert ist. Das ist aber auch noch nicht nötig hier, — es wird später geschehen — da wir hier nur einstweilen die einfachsten logischen Möglichkeiten feststellen.)

7. Hieraus können wir nun schon einige logische Konsequenzen ableiten. Gemäß der ersten Festsetzung am Anfang von Nr. 6 können wir schließen, daß gleiche Flächenstücke ein und derselben Kugel eine Gesamtbeleuchtung erfahren, welche nicht unterscheidbar, gleich ist. Bezeichnen wir die hypothetische „Gesamtwirkung des Leuchtpunktes" auf irgendeine der Kugeln durch die Größe $m$, so wird ein Quadratzentimeter der Kugel mit dem Radius $\varrho$ die Gesamtbeleuchtung

$$J_\varrho = \frac{m}{4\varrho^2 \pi}$$

erfahren. Wir nennen $J_\varrho$ die „Beleuchtungsstärke des Leuchtpunktes für die Entfernung $\varrho$." Haben wir nun einen zweiten Leuchtpunkt, dessen Konstante $m'$ ist, und der eine Kugel vom Radius $\varrho'$ beleuchtet, so ist für diesen Fall:

$$J_{\varrho'} = \frac{m'}{4\varrho'^2 \pi}$$

Finden wir nun auf irgendeine Weise, daß die Beleuchtungsstärken $J_\varrho$ und $J_{\varrho'}$ einander gleich sind, so folgt:

$$m' : m = \frac{1}{\varrho^2} : \frac{1}{\varrho'^2}$$

8. Wir haben bisher den Elementarvorgang aufgestellt, und wissen über dessen Verhältnisse genau Bescheid. Wir haben dabei einstweilen einige Begriffe aufgestellt, denen bisher gar nichts Wirkliches entspricht, die bisher sozusagen nur logische Hohlformen sind. Wir sahen in Nr. 7, daß uns die einfache zweite Festsetzung der Nr. 6 erlaubt, weitere logische und mathematische Schlüsse zu ziehen — allerdings stets nur rein formal-logisch, da ja den benutzten Begriffen bisher nichts in Wirklichkeit entspricht.

Nun aber, nachdem wir den Elementarvorgang in seinen logischen Eigenschaften definiert haben, wenden wir uns zur

Wirklichkeit. Welches wird nun in der Wirklichkeit der einfachste Vorgang, der Elementarvorgang sein? Offenbar derjenige Vorgang, der am genauesten dem logischen Schema gehorcht, das wir soeben aufgestellt haben. Denn, wäre er ein anderer, hätte also auch andere Gesetze, dann könnten letztere nicht mehr die einfachsten sein, da sie sonst mit den obigen identisch wären.

Unsere Aufgabe gegenüber der Wirklichkeit ist also jetzt die: Suche einen Vorgang, der möglichst diejenigen Verhältnisse zeigt, die wir soeben für den Elementarvorgang logisch aufstellten. Ist ein solcher Vorgang überhaupt in der Wirklichkeit möglich, ist er herstellbar?

Bevor wir aber diese Frage in Nr. 10 in Angriff nehmen, wollen wir eine wichtige Bemerkung einschalten, die sich an die bisherigen Nummern anschließt.

9. Die Nummern bisher enthielten größtenteils reine logische Konstruktion. Es war nämlich auch, wie man sich leicht überzeugt, gar nicht von Belang, daß wir unseren Punkt gerade als „leuchtend" bezeichneten, wir hätten ebensogut allgemein von einem „wirkenden Punkte" sprechen können, ohne irgendwie unsere logischen Überlegungen ändern zu müssen. Und daraus geht hervor, daß unsere Ableitung der logischen Eigenschaften des Elementarvorganges ebenso für jede andere unabhängige Wirkung (d. h. deren Gesetze nicht von anderer Seite her bestimmt sind) der gleichen Art gelten muß (z. B. Wärmestrahlung u. a.).

Wir könnten an unsere obige Überlegung (welche übrigens die Geometrie voraussetzt) nun weiter eine ganze mathematische Theorie anschließen, indem wir allgemein die Beleuchtung von Gegenständen durch punktförmige Lichtquellen untersuchen, indem wir von den einfachsten Fällen wiederum zu verwickelteren aufsteigen (durch Integration und Synthese). Es wäre das die Theorie der Beleuchtung von Flächen durch eine punktförmige Lichtquelle[1]. Und ebenso

[1] Diese Theorie hat Herr L. Burmester vollständig entwickelt in „Theorie u. Darst. d. Beleuchtung gesetzm. gestalteter Flächen". L. 1871.

würde folgen, daß diese Theorie für alle Fälle von „wirkenden Punkten“ überhaupt gültig sei.

10. Nun aber zu der manuellen Herstellung des Elementarvorganges. Um den Forderungen von Nr. 3 und 4 zu genügen, werden wir eine möglichst punktförmige Lichtquelle manuell herzustellen haben, derart, daß diese nach allen Seiten möglichst gleich beschaffen ist, dann muß auch nach dem Identitätssatze das Leuchten entsprechend gleich sein nach allen Seiten, da alle seine Bedingungen nach allen Seiten gleich sind. Damit sind die beiden ersten Forderungen realisiert. Um die erste Forderung (a) von Nr. 6 herzustellen, sorgen wir dafür, daß bei der manuellen Ausführung die Umgebung des Leuchtpunktes nach allen Seiten die gleiche ist, d. h. ein Unterschied in derselben an verschiedenen Seiten des Leuchtpunktes nicht wahrgenommen werden kann.

11. Nun kommen wir zur Realisierung der zweiten Forderung (b) der Nr. 6, welche sich von den bisherigen dadurch unterscheidet, daß sie sich nicht direkt auf reale Verhältnisse bezieht, sondern bisher noch nicht verwendete Begriffe enthält, denen eine Bedeutung in der Wirklichkeit bisher nicht zukommt. Da wir nämlich bis jetzt nicht in der Lage sind, die „Gesamtwirkung des Leuchtpunktes auf eine Kugel“ festzustellen, können wir auch noch nicht feststellen, ob in der Tat zwei verschiedene solche Kugeln die gleiche Gesamtwirkung aufweisen oder nicht. Unser Bestreben muß also darauf gerichtet sein, eine solche Feststellung manuell zu ermöglichen, und dadurch bei einem vorgelegten Falle der Wirklichkeit zu entscheiden, ob tatsächlich der Elementarvorgang vorliegt oder nicht.

Es handelt sich also darum, eine Anordnung in der Wirklichkeit zu finden, welche uns erlaubt, diese Feststellung zu machen, und unsere Festsetzung auf ihr Vorhandensein in einem Falle der Wirklichkeit zu prüfen. Das gleiche würden wir erreichen, wenn wir zwar nicht die Festsetzung selbst, sondern irgendeine logische Folge derselben manuell prüfen könnten. Dieser Fall ist hier gegeben. Wir haben in Nr. 7 ein Gesetz abgeleitet aus unseren Festsetzungen, dessen manuelle Prüfung möglich ist, sobald wir die Beleuchtungsstärke zweier Lichtquellen in der Wirklichkeit vergleichen können.

Bekanntlich kann das auf verschiedene Weisen ausgeführt werden. Am bekanntesten sind die Methoden von Rumford und Bunsen, welche sich resp. der Vergleichung der von zwei Lichtquellen geworfenen Schatten, oder eines Ölfleckens bedienen. Indem ich etwa die erste der beiden Methoden verwende, definiere ich, Lichtstärken (oder Beleuchtungsstärken) sind gleich, wenn sie nebeneinander befindlich von meinem Auge nicht unterschieden werden können. Und sobald nun diese Definition gemacht ist. bin ich in der Lage, unsere Festsetzung, respektive das aus ihr abgeleitete Gesetz manuell zu prüfen.

Prüfe ich auf bekannte Weise nun tatsächlich das betreffende Gesetz, so werde ich im allgemeinen finden, daß es in einem beliebigen konkreten Falle nicht oder doch nur mit ziemlich großen Abweichungen gilt.

12. Diesen letzten Umstand wollen wir nun etwas näher betrachten. Was können wir daraus schließen, wenn in einem gegebenen Falle das Gesetz sich nicht erfüllt zeigt in der Wirklichkeit? Gemäß unseren Definitionen lediglich das, daß der vorliegende Fall nicht der Elementarvorgang ist. Es ist damit also noch gar nichts über die Geltung unseres Gesetzes in der Wirklichkeit ausgesagt.

Unsere weitere Aufgabe wird also sein, die Umstände des betreffenden Vorganges so zu variieren, daß das gewünschte Gesetz besser erfüllt wird. Wir werden später noch genau die hier mitspielenden Umstände zu untersuchen haben.

Nehmen wir einmal an, wir hätten in einem Falle unser Gesetz in den Grenzen der momentanen Meßgenauigkeit bestätigt gefunden, dann hätten wir in dem betreffenden Falle eine wirkliche Realisierung unseres Elementarvorganges vor uns gehabt, da wir dann einen Vorgang gehabt hätten, der in allen Punkten den Forderungen gehorcht hätte, die wir gemäß dem Machschen Ökonomiegesetze an den Elementarvorgang stellten.

13. Variieren wir nun, ausgehend von der soeben besprochenen Realisierung des Elementarvorganges, die Umstände so, daß nunmehr das Gesetz nicht mehr gilt, so wollen wir die nun hinzugekommenen Umstände, welche die Geltung unseres Gesetzes verhindern als „störende Umstände" bezeichnen. Diese störenden Umstände, welche die Abweichungen von dem Gesetze, die sogenannten „Fehler" erzeugen, sind also erst durch unser aufgestelltes Gesetz definiert; ohne ein Gesetz, das sie stören könnten, gäbe es auch keine „störenden Umstände".

Statt daß wir also sagen: „im Falle des Elementarvorganges gilt das betreffende Beleuchtungsgesetz", können wir auf Grund dieser Definition auch sagen: „Im Falle von Abwesenheit aller störenden Umstände gilt das Beleuchtungsgesetz". Und diese beiden Sätze sind selbst nichts anderes als die Definitionen von unserem „Elementarvorgang" und von „störende Umstände".

14. Und nun sind wir in der Lage, jeden beliebigen empirischen Beleuchtungsvorgang bei einem Leuchtpunkte, wenigstens etwas zu beurteilen. Wir können jetzt mittels unserer Vorrichtung entscheiden, ob es ein Elementarvorgang ist, oder, wenn nicht, um wieviel er von dem Elementarvorgange abweicht.

Wir sehen, daß wir jedesmal dabei eine Aufgabe der Art ausführen, die wir oben als „Analyse" bezeichnet haben. Auf Grund unserer Definitionen, Festsetzungen und manuellen Vorrichtungen können wir jetzt jeden derartigen Beleuchtungsvorgang eines Leuchtpunktes zerlegen in: den Elementarvorgang + störende Umstände. Daraus folgt auch, daß es keinen derartigen Vorgang gibt, der nicht in unserer Art könnte behandelt werden.

Andererseits haben wir oben, als wir zu dem realisierten Elementarvorgange störende Umstände hinzufügten, eine Aufgabe der manuellen Synthese vollzogen.

15. Vielleicht ist es erlaubt, in einer kurzen, allgemein verständlichen Darlegung die Hauptresultate der vorstehenden Nummern zusammenzufassen:

Betrachten wir den Beleuchtungsvorgang eines Leuchtpunktes in der Wirklichkeit, dann ist die Zahl der mitwirkenden Umstände eine geradezu ungeheure, unübersehbare. Man denke nur an alle die Beschaffenheiten, die das umgebende Medium annehmen kann. Um nun diesem Chaos wissenschaftlich beikommen zu können, müssen wir mindestens einen bestimmten solchen Vorgang einmal herausgreifen und so charakterisieren, daß er stets wieder erkennbar ist. Dann werden die anderen Vorgänge durch Angabe ihrer Verschiedenheiten von diesem schon leichter zu behandeln sein. Und das Mittel, das wir zu diesem Zwecke benutzen, ist die Charakterisierung eines bestimmten solchen Vorganges, den wir den Elementarvorgang nennen, durch ein nach bestimmten Grundsätzen (dem Machschen Ökonomieprinzipe) aufgestelltes Gesetz. Das oben behandelte Beleuchtungsgesetz ist also lediglich ein Mittel, um aus der Fülle der vorhandenen Möglichkeiten heraus eine bestimmte zu charakterisieren. Und diese bildet dann den Ausgangspunkt für die weitere Forschung, wie wir nunmehr noch darlegen wollen.

16. Zunächst sei eine Bemerkung eingeschaltet. Wie wir bei Besprechung der Literatur noch sehen werden, ist in letzterer Zeit gelegentlich der Ansicht Ausdruck verliehen worden, daß zum mindesten einige, wenn nicht alle unsere sogenannten Naturgesetze als Definitionen aufzufassen seien. Was in dieser Ansicht als wahrer Kern steckt, das können wir hier schon deutlich aufweisen. Wir können nämlich das oben besprochene Gesetz auch so aussprechen: Störende Umstände nenne ich alles, was bewirkt, daß mein Gesetz nicht gilt. Läßt man nun an Stelle von „störende Umstände“ irgendeinen Namen treten, der den speziellen Fall charakterisiert — also hier etwa „absorbierendes Medium“, dann ist mein Gesetz direkt in Form einer Definition ausgesprochen,

was natürlich den beschriebenen tatsächlichen Sachverhalt in keiner Weise ändert. Das gleiche gilt natürlich für jedes auf gleiche Art abgeleitete Gesetz.

17. Fragen wir uns nun, welche Folgerungen sich aus dem Vorstehenden ziehen lassen in Hinsicht auf die sogenannte „experimentelle Prüfung" des besprochenen Gesetzes. Zunächst ergibt sich, daß wir bei der Anstellung eines solchen Experimentes *nicht das Gesetz im allgemeinen, sondern den einzelnen Fall prüfen.* Das Resultat des Experimentes sagt uns nicht, ob das genannte Gesetz „in der Wirklichkeit gilt", sondern es sagt uns, ob wir in dem vorliegenden Falle den Elementarvorgang vor uns haben oder nicht, und wenn nicht, wie weit der vorliegende Fall vom Elementarvorgange abweicht. Ist das Experiment ein solches, das mit aller momentan möglichen Genauigkeit den Elementarvorgang zu realisieren sucht, dann sagt uns das Resultat des Experimentes, inwieweit uns diese Realisierung tatsächlich gelungen ist.

18. Mit der Aufstellung dieses Elementarvorganges ist jedoch die wissenschaftliche Arbeit zur Erklärung und Beherrschung der Beleuchtungsvorgänge noch keineswegs beendet, sondern dieser Elementarvorgang ist nur das erste Glied gewissermaßen einer unendlichen Reihe, nach welcher, wie wir in Analogie zu § 6 sagen können, jeder Beleuchtungsvorgang entwickelt werden kann.

Auf Grund unserer Festsetzungen über den Elementarvorgang war die Gesamtlichtmenge auf allen um unseren Leuchtpunkt als Zentrum gelegten Kugeln konstant im Falle des Elementarvorganges. Alle Erscheinungen, welche dieses Gesetz störten, faßten wir unter dem Namen der störenden Umstände zusammen. Diese letzteren sind es nun, welche gewissermaßen das unerschöpfliche Reservoir des weiteren wissenschaftlichen Fortschrittes bilden. Unsere „Entwickelung" der Beleuchtungsvorgänge besteht bisher lediglich in folgendem:

Beleuchtungsvorgang = Elementarvorgang + Rest
(Rest = störende Umstände).

Um nun das zweite Glied dieser Entwickelung zu finden, beachten wir, daß wir vom Elementarvorgang, wo die Lichtmenge auf allen Kugeln konstant war, gemäß dem Machschen Ökonomiegesetz zum nächst einfachen Falle übergehen müssen, oder besser, daß wir zu unserem Elementarvorgange den einfachsten Fall der störenden Umstände hinzufügen müssen. Es ist also ein neuer Elementarvorgang der störenden Umstände aufzustellen. Diesen können wir durch rein mathematisches Fortschreiten erhalten, wobei wir eine neue Konstante einführen. Sei $m_r$ die Lichtmenge auf der Kugel vom Radius $r$, welche im Falle des Elementarvorganges konstant $= c_0$ war, so wird sie jetzt:

$$m_r = c_0 + c_1 r.$$

Wir haben also jetzt einen „störenden Umstand", der sich in dem Gliede $c_1 r$ ausdrückt, und bewirkt, daß die Lichtmenge auf den Kugeln sich proportional dem Radius ändert. Finden wir bei einer experimentellen Prüfung eines solchen Falles die Konstante $c_1$ positiv, so haben wir mehr Licht als von dem Leuchtpunkte kommt. Die experimentelle Untersuchung eines solchen Falles wird uns dann die wesentlichen Umstände dieser Erscheinung lehren, welche etwa in anderen Lichtquellen, Phosphoreszenz des Mediums usw. bestehen könnten. Nehmen wir an, daß andere Lichtquellen ausgeschlossen seien, wie wir das meist bei unseren Versuchen bewirken werden, so wird $c_1$ negativ werden. Einen solchen „störenden Umstand", der genau die obige Abweichung realisiert, nennen wir ein homogenes Medium, die Störung der Lichtmenge selbst nennen wir Absorption, und $c_1$ ist die für die Absorption des betreffenden Mediums charakteristische Konstante. Es ist unmittelbar klar, daß für die Realisierung dieses „Elementarvorganges 2. Ordnung", wie man vielleicht sagen könnte, sowie über die „experimentelle Prüfung" seines Gesetzes wörtlich das gleiche gilt, was wir oben für den ersten Elementarvorgang nachwiesen.

19. In ganz gleicher Weise könnte man fortfahren, neue Glieder unserer Reihenentwickelung hinzuzufügen. Doch erhalten

die höheren Glieder im allgemeinen keine besonderen Namen mehr, aus Gründen, die sofort ersichtlich sind. Man sieht, daß das oben angefangene Vorgehen völlig äquivalent ist der Entwickelung der Beleuchtungsstärke etwa längs eines Strahles in eine nach steigenden Potenzen von $r$ geordnete Potenzreihe.

Auf Grund der genannten Gesetze lassen sich dann die Absorptionsverhältnisse oder Beleuchtungsverhältnisse in Medien mit beliebig vorgegebenen „Absorptionsfunktionen des Ortes" ein für allemal und im voraus erledigen.

20. Fügen wir so zu dem Elementarvorgange immer weitere störende Umstände hinzu und machen so den Vorgang immer verwickelter, so ist das diejenige Tätigkeit, welche wir als Synthese bezeichneten. Von dieser könnte man etwa die „Integration" unterscheiden, indem wir unter dieser die Synthese gleicher Elementarvorgänge verstehen, während bei der Synthese verschiedene Vorgänge zusammengesetzt werden.

So gelangen wir durch Integration von unserem Elementarvorgang zu den Gesetzen, welche[1] statthaben, wenn wir statt eines Leuchtpunktes eine leuchtende Ebene, ein leuchtendes Ellipsoid usw. wählen. Hier gilt nämlich für jeden einzelnen Punkt der Elementarvorgang mit seinem Gesetze, und zwar genau so, wie wenn er allein wäre; denn nach dem Identitätssatze ist dort, wo die Bedingungen vorhanden sind, auch der betreffende Vorgang vorhanden.

21. Um noch einen Schritt weiterzugehen, sei noch kurz auf das Brechungsgesetz hingewiesen. Haben wir eine Ebene, die aus lauter leuchtenden Punkten besteht, so werden, wenn diese in ein homogenes Medium eingebettet ist, die Flächen gleicher Beleuchtungsstärke Ebenen sein parallel zur gegebenen. Ist nun ein anderes homogenes Medium vorhanden, das mit einer Ebene an das erstere grenzt, die einen Winkel mit der gegebenen Ebene bildet, dann werden die

[1] in einem nicht absorbierenden Medium, d. h. ohne störende Umstände.

Ebenen gleicher Beleuchtungsstärke im zweiten Medium nicht mehr zur ersten Ebene parallel sein. Alle Einzelgrößen lassen sich dann aus den beiden Absorptionskoëffizienten bestimmen.

Fragen wir nun weiter, wie die Wellentheorie des Lichtes sich hier anschließen kann, so kann man das etwa so ausdrücken: Wir finden experimentell (etwa beim Fresnelschen Versuch) eine Erscheinung, welche nicht von der Absorption herrühren kann. Dies gibt uns Anlaß zur Bildung neuer Elementarvorgänge, welche sich an den früheren in der Weise anschließen, daß sie ihn zwar völlig bestehen lassen, aber gewissermaßen eine feinere Struktur desselben angeben, indem wir etwa jetzt hinzufügen, daß der im vorigen behandelte Leuchtvorgang alle seine Eigenschaften behält, aber nun als aus einer feinen Wellenbewegung bestehend betrachtet wird.

Wir können uns hier nicht weiter auf diese Dinge, welche für das folgende ohne Belang sind, einlassen, doch sei noch darauf hingewiesen, daß es sehr wahrscheinlich ist, daß mit fortschreitender Wissenschaft immer weitere solche „Verfeinerungen" notwendig werden, (unter beständiger Erhaltung der früheren Gesetze) die jedoch immer allgemeiner werden, d. h. immer weitere Gruppen von Erscheinungen umfassen werden. Dies jedoch hier nur andeutungsweise.

---

## III. Abschnitt: Die Genauigkeit.

### § 9. Das Machsche Ökonomieprinzip.

1. Zunächst sei nochmals festgehalten: Unter „Machsches Ökonomieprinzip" wollen wir die Gesamtheit derjenigen Vorschriften oder Regeln verstehen, welche dazu dienen, aus der Gesamtheit der Vorgänge eines Gebietes die betreffenden Elementarvorgänge eindeutig auszuwählen. Wir haben diese Vorschriften bisher lediglich in einigen allgemeinen Bemerkungen, sowie an Beispielen kennen gelernt. Wir wollen versuchen, dieselben

soweit das für unsere Zwecke nötig und soweit es uns bisher gelungen ist, etwas deutlicher herauszuarbeiten.

2. Diejenige Eigenschaft, welche einen Vorgang eines Gebietes als Elementarvorgang charakterisiert, wollen wir dadurch ausdrücken, daß wir sagen, der Vorgang soll der einfachste des betreffenden Gebietes sein. Es wird festzustellen sein, was wir unter diesem Ausdrucke verstehen.

3. Zu diesem Zwecke betrachten wir irgendeinen Vorgang. Wir kennen seine wesentlichen Bedingungen. Diese Bedingungen mögen, bis auf eine, Wissenschaften angehören, deren Elementarvorgänge bereits aufgestellt sind, so daß wir also die „einfachste Form" dieser Bedingungen kennen. Die letzte Bedingung gehört noch nicht einer Wissenschaft an, welche ihre Elementarvorgänge kennt. Eben der Elementarvorgang, den wir suchen, ist der erste gesuchte Elementarvorgang dieser Wissenschaft. Wir geben dann den übrigen Bedingungen ihre einfachste Form, und aus den unendlich vielen verschiedenen Möglichkeiten der Form, in denen der letzte Umstand auftreten kann, wählen wir eine bestimmte, ebenfalls einfachste, aus durch Angabe des „Gesetzes", dem sie gehorchen soll in diesem einfachsten Falle.

Diese Überlegung führt darauf, daß es mindestens eine Wissenschaft geben muß, deren erster Elementarvorgang nur einer einzigen Bedingung unterliegt. Wir werden sehen, daß diese Wissenschaft die Geometrie, und der betreffende Elementarvorgang der starre Körper ist.

4. Um nun auf die nähere Bestimmung dieses „einfachsten Vorganges" eines bestimmten Gebietes näher einzugehen, so müssen wir zunächst sagen, daß es außerordentlich schwer zu sein scheint, die Vorschriften oder Regeln für diese Bestimmung so allgemein zu fassen, daß sie für alle Fälle anwendbar wären. Wir werden daher eine entsprechende Untersuchung (welche sich auf außerordentlich allgemeine Begriffsbildungen zu richten hätte) hier nicht durchzuführen versuchen, sondern im wesentlichen unser Augenmerk darauf richten, daß wir für unseren speziellen Zweck, die Geome-

trie, zum Ziele gelangen. Im übrigen aber seien die folgenden Überlegungen angestellt.

5. Wenn wir von einem bestimmten Gebiete oder einer bestimmten Wissenschaft sprechen, deren Elementarvorgang wir suchen, oder von einer Gruppe von Vorgängen, dann heißt das, daß wir eine Gruppe von Vorgängen zu einem Begriffe zusammenfassen. Um feststellen zu können, ob ein bestimmter Vorgang dem betreffenden Gebiete, der Wissenschaft, der Gruppe angehört, müssen bestimmte Kriterien gegeben sein, an denen das erkennbar ist. Diese Kriterien, welche also ein solcher Vorgang aufweisen muß, wollen wir als „Eigenschaften" desselben kurz bezeichnen, und zwar, weil diese Eigenschaften es sind, welche seine Zugehörigkeit zu dem betreffenden Begriffe des Gebietes, der Wissenschaft, der Gruppe bewirken, wollen wir diese Kriterien als die „Begriffseigenschaften des betreffenden Vorganges" bezeichnen. Hierauf können wir sofort aussprechen: Auch der Elementarvorgang des betreffenden Gebietes usw. muß die Begriffseigenschaften aufweisen, die jeder Vorgang des betreffenden Gebietes aufweist.

Zum Beispiel: Jede „Bewegung eines Massenpunktes" bedarf eben eines Massenpunktes und einer Linie, auf der er sich bewegt, und jeden Moment seinen bestimmten Ort auf dieser Linie. Der Elementarvorgang desjenigen Gebietes, das wir durch den Begriff „Bewegung eines Massenpunktes" gekennzeichnet haben, bedarf also auch dieser „Begriffseigenschaften" dieser Vorgänge. Dieser Elementarvorgang ist der im sogenannten Trägheitsgesetze beschriebene Fall der Bewegung. In gleicher Weise kann man das Beispiel der „Beleuchtungsvorgänge" des vorigen Paragraphen zur Illustration verwenden, und jeden anderen Elementarvorgang eines bestimmten Gebietes.

6. Da jedoch innerhalb eines solchen Gebietes usw. verschiedene Vorgänge vorhanden sind, so müssen diese Vorgänge Kriterien aufweisen, welche erlauben, sie untereinander zu unterscheiden. Alle solchen Kriterien eines Vorganges

wollen wir seine Individualeigenschaften[1] nennen. Es ergibt sich unmittelbar, daß nach unserer Definition jeder Vorgang des betreffenden Gebietes Individualeigenschaften besitzen muß.

7. Wir definieren dann: Als Elementarvorgang eines bestimmten Gebietes bezeichnen wir denjenigen, der das Minimum von Individualeigenschaften besitzt.

Wir haben damit einen Gedankengang skizziert, auf Grund dessen es vielleicht möglich ist, zur wünschenswerten exakten Behandlung des Prinzipes zu gelangen. Wir wollen uns jedoch, wie gesagt, hiermit begnügen, und auch auf den Beweis, daß es stets nur ein solches Minimum gibt, verzichten, um so mehr, als wir sehen werden, daß es in jedem einzelnen konkreten Falle genügt, den einfachsten Fall tatsächlich zu kennen und ihn als solchen nachzuweisen.

8. In den vorigen Nummern wurde versucht, dasjenige in etwas exaktere Begriffe zu fassen, was man populär etwa so ausdrücken könnte: Der Elementarvorgang eines Gebietes ist derjenige, den man zwar durch Hinzufügen von Bestimmungen verwickelter machen, von dem man aber keine Bestimmung mehr wegnehmen kann.

Auf Grund der Definition in Nr. 7 lassen sich nun verschiedene speziellere und nicht so umfassende Formen des Ökonomieprinzipes verständlich machen. So können wir z. B. auch sagen: „Der Elementarvorgang eines Gebietes ist derjenige, an dem alle Umstände, die[2] einander gleich sein können, auch[2] wirklich gleich sind." Jeder Vorgang nämlich, bei dem einmal zwei solche Umstände nicht gleich sind, hat mindestens eine Individualeigenschaft mehr, als der, bei dem sie gleich sind.

Ist ein solcher Umstand ein meßbarer Begriff, dann bedeutet die eben genannte „Gleichheit", daß wir ihn beim Elementarvorgang = const setzen; wie wir das z. B. in § 8 sahen.

[1] „in bezug auf das betreffende Gebiet" wäre etwa noch hinzuzufügen.
[2] zunächst logisch.

Das sogenannte Gesetz des Elementarvorganges, das sich auf das Verhalten des Umstandes bezieht, welcher dem noch unerforschten Gebiete angehört (siehe Nr. 3), ist dabei, wie aus Nr. 7 und dem eben Gesagten folgt, das, daß ein geeigneter Begriff = const gesetzt wird. Was sich auch schon daraus ergibt, daß das erste Glied der parallel laufenden mathematischen Entwickelung eine Konstante sein muß[1].

9. Betrachten wir z. B. die Bewegung eines Massenpunktes. Der Elementarfall wird erhalten, wenn der Punkt sich längs einer Geraden bewegt, da die Gerade diejenige Linie ist, welche „die wenigsten Individualeigenschaften hat" (wir werden über die Gerade noch genauer zu sprechen haben). Ferner wird das „Gesetz" des Vorganges sein, daß sich der Punkt in gleichen Zeiten um gleiche Stücke fortbewegt, seine Geschwindigkeit = const ist. Es ist ersichtlich, daß gerade diese Festsetzungen den obigen Forderungen des Ökonomieprinzipes entsprechen. Bewegt sich der Punkt nicht so, dann geschieht das auf Grund „störender Umstände", die hier unter dem Namen „Kraft" zusammengefaßt werden.

Derartige Beispiele bietet jedes Lehrbuch der Mechanik, der theoretischen Physik oder Chemie zu Dutzenden, wenn sie natürlich auch nicht in unserer Weise herausgearbeitet sind.

10. Wir haben die Elementarvorgänge bisher in diesem Paragraphen lediglich r e i n  l o g i s c h behandelt, d. h. wir haben versucht, die Regeln dafür aufzustellen, wie für ein bestimmtes Gebiet der Elementarvorgang in seinen Eigenschaften bestimmt werden könne. Diese Bestimmung muß

---

[1] Herr F. K l e i n sagt über die Formulierung des M a c h schen Ökonomieprinzipes (Anwendung der Diff. und Integralrechnung usw. 1902, p. 43): „Bei der Aufstellung der Naturgesetze greift man (nicht erst auf Grund ausdrücklicher Überlegung, sondern unwillkürlich) nach den einfachsten Formeln, die die Erscheinung mit hinreichender Genauigkeit darzustellen vermögen". Man sieht aus der obigen Darlegung, wie außerordentlich schwierig es ist, diese bisher unbewußt geübte Tätigkeit in eine bewußte zu verwandeln, sie in exakte Begriffe zu fassen.

der manuellen Herstellung des betreffenden Elementarvorganges natürlich vorhergehen, denn sie ist es ja, welche uns erst ein bestimmtes Ziel angibt für die Auswahl eines genau bestimmten Vorganges aus der unendlichen Mannigfaltigkeit von Vorgängen, die das betreffende Gebiet umfaßt[1]. Es handelt sich also jetzt um die Frage, wie werden diese logischen Forderungen des Machschen Ökonomieprinzipes in der Wirklichkeit zur Geltung gebracht? Diese Frage ist es im Wesentlichen, der die Ausführungen der nächsten Paragraphen gewidmet sind.

11. Betrachten wir irgendeinen beliebigen Vorgang der Wirklichkeit aus einem Gebiete, dessen Elementarvorgang bekannt ist, d. h. wo wir die Eigenschaften des Elementarvorganges einstweilen logisch festgestellt haben. Um dann festzustellen, ob der betreffende Vorgang der Wirklichkeit der Elementarvorgang selbst ist oder nicht, bedarf es der manuellen Untersuchung dieses Vorganges, d. h. der manuellen Feststellung, ob der gegebene Vorgang die Eigenschaften des Elementarvorganges hat oder nicht, ob er dessen Gesetzen gehorcht oder nicht.

Wir haben da zwei mögliche Fälle: a) Der Vorgang der Wirklichkeit hat die Eigenschaften des Elementarvorganges, er gehorcht seinen Gesetzen, dann nennen wir ihn eine Realisierung des betreffenden Elementarvorganges. b) Der gegebene Vorgang tut beides nicht, dann befolgen wir das, was wir in § 6 dieses Kapitels als das Prinzip der Ex-

---

[1] Wir verkennen dabei nicht, daß historisch beim einzelnen Forscher diese beiden Tätigkeiten der logischen Feststellung der Eigenschaften des Elementarvorganges und dessen manuelle Herstellung untrennbar ineinanderfließen, so daß, wie Herr F. Klein in der eben zitierten Stelle sagt, unwillkürlich das entsprechende Resultat zustande kommt. Für unseren momentanen Zweck handelt es sich jedoch nicht um die Psychologie des Forschens, sondern um die Theorie dieser Tätigkeit, d. h. um die Frage, wie die einzelnen Vorgänge bei dieser Tätigkeit exakt herausgearbeitet und in ihrem Vorhandensein und ihrer Wirkung begründet werden können.

haustion bezeichnet haben, und worüber nun näher zu handeln sein wird.

12. Wir haben oben die Elementarvorgänge rein logisch durch Angabe ihrer Eigenschaften und Gesetze charakterisiert. In bezug auf die Wirklichkeit, wo alle möglichen Vorgänge zu berücksichtigen sind, müssen wir sagen: Nur wenn keine „störenden Umstände" vorhanden sind, haben wir den Elementarvorgang eines Gebietes.

Haben wir also irgendeinen Vorgang eines Gebietes, und wir finden durch manuelle Untersuchung, daß er von dem betreffenden Elementarvorgange abweicht, dann sagen wir, der Grund für diese Abweichungen sind die störenden Umstände. Letztere werden also durch den Elementarvorgang als solche definiert.

Dieses ganze Vorgehen ist aber nichts anderes als eine typische Exhaustion. Um den vorgegebenen beliebigen Vorgang der Analyse zu unterwerfen, ihn gewissermaßen in eine Reihe zu entwickeln, wird als erstes Glied dieser Entwickelung der betreffende Elementarvorgang verwendet, und der „Rest der Reihe", d. h. alles, was den Vorgang von dem Elementarvorgange unterscheidet, einstweilen als „störende Umstände" definiert.

13. Auf diese Weise werden dann durch jeden Elementarvorgang auch störende Umstände definiert. Das Vorgehen beruht also, populär ausgedrückt, darin, daß man bemerkt, daß der betreffende Vorgang vielseitig variiert werden kann, daß das betreffende Gebiet sehr viele Vorgänge umfaßt. Unter diesen Vorgängen wählt man nun denjenigen, dessen Bedingungen so variiert sind, daß sie dem Machschen Ökonomiegesetze genügen, heraus, und bezeichnet diesen als den Elementarvorgang, den ungestörten Vorgang. Man könnte natürlich ebensogut irgendeinen anderen der Vorgänge auswählen, z. B. bei dem Beispiel vom leuchtenden Punkte im vorigen Paragraphen, den, wo die Gesamtlichtmenge auf den Kugeln abwechselnd zu- und abnimmt, statt konstant zu

bleiben. Dann würden natürlich auch die störenden Umstände andere werden. Wegen der unangenehmen Konsequenzen, welche die Wahl eines nicht einfachsten Vorganges als Elementarvorgang nach sich ziehen würde, verweisen wir auf das Ende von § 6 dieses Kapitels.

14. In ganz der gleichen Weise wird dann aus den „störenden Umständen" eines Vorganges gemäß dem Ökonomiegesetze der einfachste ausgewählt, dessen „Wirkung" auf den Elementarvorgang die ist, daß er um die nächst einfachste Stufe verwickelter wird, wenn man so sagen darf.

In Wirklichkeit ist die Sache so wie oben, daß nämlich zunächst die nächstverwickelte Form des Elementarvorganges logisch aufgestellt wird, und derjenige Vorgang als einfachster „störender Umstand" definiert wird, der, wie die experimentelle Untersuchung zeigt, gerade die so erhaltene Form des Elementarvorganges (den man so den Elementarvorgang 2. Ordnung nennen könnte) hervorbringt. Damit ist „das zweite Glied" der Entwickelung der Vorgänge des betreffenden Gebietes erreicht. Auch dieser Elementarvorgang 2. Ordnung definiert natürlich wieder seine „störenden Umstände".

In dieser Weise geht dieser Prozeß fort, und man sieht, wie ein vorgegebener Vorgang hiedurch gemäß der Aufgabe der Analyse in eine Reihe von einfachsten Einzelvorgängen zerlegt wird.

15. Wir sprachen davon, daß der „Grund" der Abweichungen von dem Gesetze des Elementarvorganges störende Umstände seien. Wir müssen noch sagen, wie sich das mit dem Identitätssatze des § 5 zusammenreimt.

Die genannten Abweichungen werden, wie wir sehen, festgestellt durch Beobachtung, Experiment. Die eben angeführten Verhältnisse lassen sich dann so aussprechen: Diese störenden Umstände sind wesentliche Umstände jenes Vorganges, den wir soeben als das zu machende Experiment bezeichneten. Ein Teil dieses Vorganges ist auch die Vorrichtung, an der wir beobachten. Variieren wir die wesentlichen Umstände des Vorganges, dann ändert sich der Vorgang selbst gemäß dem Identitätssatze. Diese Tatsache nun, daß durch jede Änderung eines wesentlichen Umstandes der Vorgang sich ändert, also jeder Änderung hier eine Änderung dort entspricht, hat man als den Satz vom zureichenden Grunde (principium causae sufficienti) bezeichnet. Es wird also jedem störenden Umstande eine Änderung des gesamten Messungsvorganges (Experimentes) entsprechen und umgekehrt, und somit läßt sich experimentell entscheiden, ob und inwieweit der Elementarvorgang in dem gegebenen Vorgange vorliegt, oder nicht. Im übrigen werden wir die hier berührten Umstände noch näher in dem Paragraphen über die Messung zu behandeln haben (§ 12 dies. Kap.).

16. Die Gesetze der Elementarvorgänge liefern dann das, was man in manchen Wissenschaften (Geometrie, Mechanik) die Axiome nennt. Wir wollen hierauf nur kurz hingewiesen haben, näher werden wir uns für den Fall der Geometrie hiemit noch zu befassen haben. Sie liefern die logischen Grundlagen, auf denen sich dann das durch logisches Schließen aufgebaute logische Gebäude einer sogenannten Theorie des betreffenden Gebietes erhebt, und damit erhalten wir die Grundlagen für die mathematische Behandlung des Gebietes, deren Übereinstimmung mit der Wirklichkeit der nächste Paragraph gewidmet sei. Dort werden wir noch besser sehen, daß die Elementarvorgänge den Punkt darstellen, wo die Logik und die Mathematik unmittelbar an die Wirklichkeit ansetzt.

17. Schließlich wollen wir, um eine kurze Ausdrucksweise zu haben, die Gesamtheit der Gesetze der Elementarvorgänge und ihrer logischen Folgen den „logischen Urbau" nennen. Im Gegensatze dazu heiße die Gesamtheit derjenigen manuellen Arbeiten, welche die Elementarvorgänge und ihre weiteren Kombinationen manuell zu realiseren sucht, der „manuelle Urbau".

## § 10. Die Übereinstimmung der mathematischen Gesetze mit der Wirklichkeit.

1. Auf Grund der vorstehenden Untersuchungen können wir nun bereits einige zusammenfassende Resultate aussprechen. Das im Titel genannte Problem, die Übereinstimmung des logischen und des manuellen Urbaues zu untersuchen (wie wir uns auch gemäß dem vorigen Paragraphen ausdrücken können), können wir jedoch noch nicht ganz durchführen; wir können es nur unter einer bestimmten Voraussetzung, die folgendermaßen lautet:

2. Wir setzen voraus, daß es uns gelinge, die vom Machschen Ökonomiegesetze geforderten Elementarvorgänge manuell derart herzustellen, daß sie absolut den für sie aufgestellten Forderungen gehorchen. Einen derart hergestellten Elementarvorgang wollen wir eine absolute Realisierung des betreffenden Elementarvorganges nennen. Mit dieser Voraussetzung werden wir uns in den folgenden Paragraphen noch zu beschäftigen haben.

3. Unter dieser Voraussetzung gilt dann das folgende: Da wir einen bestimmten Elementarvorgang auf diese Weise manuell herstellen, daß wir einen solchen Vorgang herzustellen suchen, der den betreffenden Forderungen und Gesetzen des Elementarvorganges gehorcht, und dies gemäß der in Nr. 2 gemachten Voraussetzung uns gelingen soll, so können wir aussprechen:

Wir haben unter der genannten Voraussetzung einen Weg gefunden, um die Wirklichkeit mit den vom Machschen Ökonomieprinzipe aufgestellten Gesetzen in absolute Übereinstimmung zu bringen.

Statt „die von oder gemäß dem Machschen Ökonomieprinzipe aufgestellten Gesetze" wollen wir künftig kurz sagen: die a priorischen Gesetze.

4. Fügen wir dann mehrere solche absolute Realisierungen eines Elementarvorganges zu einem größeren Gesamtvorgange zusammen, so wird das Gesetz des Gesamtvor-

ganges sich in gleicher Weise durch mehrmaliges Zusammensetzen des Gesetzes des Elementarvorganges ergeben, ein Vorgang, den wir als Integration bezeichneten.

Fügen wir zu der absoluten Realisierung den nächst einfachen störenden Umstand hinzu, so erhalten wir einen Elementarvorgang zweiter Ordnung, von dem ebenfalls sein Gesetz in absoluter Weise gilt. Wir haben damit synthetisch diesen um eine Stufe verwickelteren Vorgang hergestellt, und die Übereinstimmung seines a priorischen Gesetzes mit der Wirklichkeit erreicht. Es ist dies die Operation, welche wir als Synthese bezeichneten. In gleicher Weise werden so Vorgänge von immer höherer Stufe und Komplikation hergestellt, welche absolut genau ihren a priorischen Gesetzen gehorchen.

5. Wir sehen also, daß es unter unserer Voraussetzung möglich ist, die Aufgaben der Integration und der Synthese und zwar gleichzeitig logisch und manuell zu lösen.

Sowie wir logisch über das Gesetz des Elementarvorganges eine weitere nächst einfache Komplikation lagern, der Entwickelung, deren erstes Glied das Gesetz des Elementarvorganges darstellt, ein neues Glied hinzufügen, — genau so fügen wir manuell der Realisierung des Elementarvorganges den entsprechenden störenden Umstand hinzu. Und beide Vorgänge entsprechen sich — nach unserer Voraussetzung — absolut genau gegenseitig. Wir können von dem logischen Gesetze auf den Vorgang schließen, und von dem manuellen Vorgang auf sein Gesetz. Und können nun einerseits für einen Vorgang von gegebener Zusammensetzung a priorisch das Gesetz bestimmen, andererseits, wenn wir manuell den betreffenden Vorgang herstellen, finden wir, daß er genau unserem a priorischen Gesetze gehorcht.

6. In den vorstehenden Nummern wurde gezeigt, daß und warum unter der gemachten Voraussetzung unsere synthetisch hergestellten Vorgänge unseren a priorischen Ge-

setzen gehorchen. Nun erhebt sich aber die Frage: Genügen auch die Vorgänge, welche wir ohne unser Zutun in der Natur vorfinden, ebenfalls diesen Gesetzen? Diese Frage führt uns zur Frage der Übereinstimmung zwischen manuellem und logischem Urbau bei der zweiten großen Aufgabe der Wissenschaft, der manuellen und logischen Analyse.

7. Um diese Frage zu beantworten, müssen wir eine zweite Voraussetzung machen, welche ganz analog zu der in Nr. 2 gelegentlich der Synthese gemachten ist. Wir setzen voraus, daß es uns gelinge, die Vorgänge der Natur derart in ihre Elementarvorgänge zu zerlegen, daß sie absolut genau durch die Gesamtheit dieser Elementarvorgänge dargestellt sind.

8. Unter dieser Voraussetzung gilt dann das folgende: Gelingt es uns einen vorgelegten natürlichen Vorgang absolut in seine Elementarvorgänge zu zerlegen, dann gehorchen nach dem Identitätssatze diese Elementarvorgänge ihren a priorischen Gesetzen, somit kann das Gesetz des Gesamtvorganges durch Zusammensetzung der Gesetze der Elementarvorgänge erhalten werden, und er wird diesem Gesetze absolut gehorchen. Wir können sagen:

Gelingt es nach unserer Voraussetzung, einen natürlichen Vorgang in seine Elementarvorgänge zu zerlegen, so gehorcht der Vorgang dem aus der Zusammensetzung der Gesetze dieser Elementarvorgänge sich ergebenden Gesetze. Woraus sich ergibt, daß auch die natürlichen Vorgänge unseren a priorischen Gesetzen gehorchen unter der gemachten Voraussetzung.

9. Diese Zerlegung eines vorgelegten natürlichen Vorganges in seine Elementarvorgänge kann nun sehr häufig nicht manuell durchgeführt werden, etwa weil der Vorgang sonst zerstört würde, oder weil Teile des Vorganges uns nicht zugänglich sind usw. Können wir nur das Erfülltsein der Bedingungen der einzelnen Elementarvorgänge manuell nachweisen, so ist nach dem Identitätssatze der Elementar-

vorgang als solcher vorhanden, wenn er auch nicht unmittelbar wahrnehmbar sein sollte. Die Zerlegung ist dabei dann eine logische, indem von dem Gesamtvorgange zurückgeschlossen wird auf die ihn zusammensetzenden Elementarvorgänge[1].

Das ist nun genau das Analogon zu dem Entwickeln einer Funktion in eine Reihe. Es ist in einem solchen Falle nicht möglich, für jeden einzelnen Elementarvorgang manuell nachzuweisen, daß hier sein Gesetz gilt, da es aber, wie gezeigt, gelten muß, so müssen wir ihm bei unserer logischen Konstruktion (Analyse) Rechnung tragen. Das ist dann diejenige logische Operation, die wir als Exhaustion bezeichnet haben. Das Gesetz des Gesamtvorganges wird dabei durch die Gesetze seiner einzelnen Elementarvorgänge gewissermaßen ausgeschöpft.

Wir können sagen: Sind bei der Analyse eines gegebenen, natürlichen Vorganges die Gesetze der einzelnen Elementarvorgänge manuell nicht aufzeigbar, dann wird deren Wirkung bei der logischen Analyse Rechnung getragen durch sogenannte Exhaustion der Gesetze der betreffenden Elementarvorgänge.

10. Fassen wir das Resultat dieses Paragraphen zusammen, so können wir etwa sagen: Es zeigte sich, daß unter den gemachten Voraussetzungen es möglich ist, eine absolute Übereinstimmung der Wirklichkeit mit den a priorischen Gesetzen herbeizuführen. Es gelingt dabei, die Aufgaben der manuellen und logischen Synthese und ebenso der Analyse völlig zu lösen[2].

---

[1] Es sei hier an die Untersuchungen der Ebbe und Flut für bestimmte Orte erinnert. Siehe hierzu G. H. Darwin, Ebbe und Flut, Leipzig 1902, ein prächtiges Werk, welches in seiner ganzen Ausdehnung ein etreffliche Illustration der in diesem Kapitel aufgestellten Sätze ist.

[2] Der erste, welcher die hohe Bedeutung der Analyse und Synthese (Isolation und Superposition) für die Theorie der wissenschaftlichen Forschung betont zu haben scheint, ist P. Volkmann. Wenn auch bei ihm diese Bedeutung noch nicht überall in ihrem vollen

## § 11. Das Prinzip der Genauigkeitsschichten.

1. Als Resultat des vorigen Paragraphen hat sich ergeben, daß die Aufgabe, welche wir uns in diesem Kapitel gestellt haben, bereits vollständig gelöst wäre, falls die beiden dort genannten Voraussetzungen erfüllt wären, daß es möglich sei, die Elementarvorgänge absolut zu realisieren und die natürlichen Vorgänge absolut in ihre Elementarvorgänge zu zerlegen.

Es ist also noch zu untersuchen, inwieweit diese Voraussetzungen erfüllt sind, und inwieweit die dabei sich ergebende Tatsache, daß sie in der Tat nicht erfüllt sind, unsere bisher aufgestellten Sätze beeinflußt. Wir haben uns nach § 5 dieses Kapitels mehr mit der logischen Seite der aufzustellenden Wissenschaften befaßt; zu dem eben genannten Zweck müssen wir uns wieder mehr der manuellen Erforschung der Wirklichkeit zuwenden.

2. Denken wir uns, wir hätten einen Vorgang eines bestimmten Gebietes manuell erforscht, soweit das mit gegebenen Mitteln möglich; ferner hätten wir uns gemäß dem Machschen Ökonomieprinzipe den zugehörigen Elementarvorgang im Geiste zurechtgelegt, und jene manuelle Vorrichtung uns hergestellt, welche uns erlaubt festzustellen, ob ein bestimmter gegebener Vorgang des Gebietes der Elementarvorgang ist oder nicht, dessen Gesetzen gehorcht oder nicht.

Nehmen wir dann irgendeinen Vorgang dieses Gebietes und prüfen ihn mittels unserer manuellen Vorrichtung, ob er der Elementarvorgang ist oder nicht. Finden wir, daß er es ist, dann sagen wir, wir haben eine Realisierung des Elementarvorganges vor uns; finden wir, daß er es nicht ist,

Maße hervortritt („Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften usw." Leipzig 1910, wir werden auf dieses sehr wertvolle Werk noch zurückzukommen haben [§ 13 d. Kap.]), so ändert das doch nichts an der außerordentlichen Bedeutung dieser schon 1894 gemachten Entdeckung. Leider war bei Erscheinen dieses Werkes diese Schrift bereits im Manuskripte vollendet.

dann sagten wir, daß die störenden Umstände Ursache seien der Abweichungen vom Elementarvorgang. Wir wollen nun den Begriff der Realisierung eines Elementarvorganges etwas erweitern, indem wir sagen:

Jeden Vorgang des betreffenden Gebietes können wir als eine Realisierung des Elementarvorganges betrachten, nur daß diese Realisierungen verschieden „genau", verschieden gut sind — worüber sogleich näheres zu sagen sein wird.

3. Die genannte Vorrichtung zur Feststellung, ob ein Elementarvorgang vorliegt oder nicht, muß erlauben zu entscheiden, a) ob Abweichungen vom Elementarvorgang vorliegen; b) bei welchem von zwei gegebenen Vorgängen diese Abweichung größer ist. Wir sagen dann: Einen Vorgang, dessen Abweichungen vom Elementarvorgange kleiner sind als bei einem anderen Vorgange der gleichen Art, nennen wir eine bessere Realisierung des Elementarvorganges als den anderen.

4. Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, daß es, um die Bedingungen eines Vorganges auf ihre einfachste Form zu bringen und so den betreffenden Elementarvorgang zu erhalten, nötig war, die Elementarvorgänge für diese Bedingungen zu kennen. Man bedurfte also zur Herstellung von Elementarvorgängen bereits anderer Elementarvorgänge. Es muß also mindestens einen Vorgang geben, der keine weiteren Bedingungen, die auf ihre einfachste Form gebracht sind, voraussetzt. Der einzige uns bekannte derartige Elementarvorgang ist der starre Körper, sein Gesetz ist, daß er sich selbst stets kongruent bleibt[1], und zu seiner Festlegung bedarf es keiner weiteren Elementarvorgänge. Haben wir dann diesen Elementarvorgang realisiert, dann können wir zu anderen Elementarvorgängen übergehen, welche dann

[1] In welcher Weise dieses Gesetz exakter zu formulieren und wie sein Erfülltsein oder Nichterfülltsein zu konstatieren ist, wird sich in Kap. III (besonders § 5) ergeben.

die einfachste räumliche Form unter ihre Bedingungen zählen[1].

Es zeigt sich also, daß, ehe wir einen anderen Elementarvorgang realisieren können, wir zuerst den starren Körper realisieren müssen.

5. Um aber den starren Körper zu realisieren, dazu nehmen wir — theoretisch betrachtet — einen ganz beliebigen Körper aus der Natur und beginnen mit ihm denjenigen Prozeß, den wir in § 6 des ersten Kapitels beschrieben haben. Praktisch nehmen wir natürlich schon anfangs einen solchen Körper, der unserer Kenntnis nach, schon möglichst den Forderungen für den starren Körper entspricht.

Das Vorgehen, das wir in Kapitel I, § 6 allgemein beschrieben, ist nun kein anderes als das hier geforderte, nämlich Realisierung von Elementarvorgängen. In der Tat, wenn wir also einmal einen starren Körper als solchen gewählt haben, dann können wir ihn für andere Elementarvorgänge, in denen räumliche Bedingungen vorkommen (und das sind alle) verwenden. Da wir aber noch nicht eine absolute Realisierung des starren Körpers haben, so werden auch die weiteren Elementarvorgänge zunächst da, wo sie von dem starren Körper abhängen, ebenfalls keine absoluten Realisierungen sein.

Nun sahen wir aber in Kapitel I, § 6, wie diese Erforschung der übrigen Erscheinungen der Wirklichkeit mittels unseres angenommenen starren Körpers (und diese Erforschung besteht ja in der Realisierung der betreffenden Elementarvorgänge), wieder zurückwirkt auf den starren Körper selbst, so daß wir durch sie zu einer besseren Realisierung des starren Körpers gelangen. Diese bessere Realisierung des starren Körpers liefert uns wieder bessere Realisierungen der weiteren Elementarvorgänge, veranlaßt uns, neue solche Ele-

[1] Darin liegt auch der Beweis, daß der starre Körper der einzige solche fundamentale Elementarvorgang ist, wenn man die Bestimmung hinzufügt, daß alle Vorgänge, mit denen wir uns beschäftigen, räumliche sein sollen.

mentarvorgänge aufzustellen für Gebiete, deren Äußerungen, deren Erscheinungen bisher noch zu unscheinbar waren, alles dies liefert uns wieder eine noch bessere Realisierung des starren Körpers, und so schreitet dieser Prozeß fort.

Das Prinzip, welches diesem Prozesse zugrunde liegt, habe ich a. a. O.[1] das Prinzip der Genauigkeitsschichten genannt. Den Prozeß selbst könnte man als den Prozeß der fortschreitenden Verbesserung der Genauigkeit bezeichnen, doch werden wir alsbald von einem anderen Gesichtspunkte aus einen kürzeren Namen dafür erhalten.

Um mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauche in Übereinstimmung zu kommen, können wir jetzt statt „bessere" Realisierung auch genauere Realisierung sagen.

6. Wir haben in der vorigen Nummer auf Grund unserer theoretischen Überlegungen mit kurzen Worten denjenigen großen manuellen Prozeß beschrieben, der die ganze auf manuelle Beherrschung der Wirklichkeit gerichtete manuelle Tätigkeit des Menschengeschlechtes umfaßt und der in seinen Zielen in Nr. 5 charakterisiert wurde. Da dieser Prozeß ein fortschreitender ist, so kommt man bei seiner theoretischen Zurückverfolgung auf einen Standpunkt, auf dem dieser Prozeß noch nicht begonnen hat, von dem aus er erst beginnt. Man könnte diesen Standpunkt etwa als den vorwissenschaftlichen Standpunkt bezeichnen. Da wir jedoch sahen, daß man jeden Vorgang bereits als eine Realisierung eines Elementarvorganges ansehen kann, wenn auch vielleicht als eine sehr schlechte, so ist dieser Standpunkt lediglich eine theoretische Fiktion, um gewissermaßen den Nullpunkt des Prozesses der fortschreitenden Genauigkeit zu bezeichnen.

Auf diesem Nullpunkt also sind noch alle Realisierungen von Elementarvorgängen von höchstmöglicher Ungenauigkeit. Wie erinnerlich, haben wir als Ursache der Ungenauigkeiten, d. h. Abweichungen vom Elementarvorgang, die störenden

[1] „Grundlinien", p. 36.

Umstände bezeichnet. Diese geben bei weiterer Erforschung selbst wieder zu Elementarvorgängen und störenden Umständen Anlaß. Die manuelle Realisierung dieser Elementarvorgänge nun setzt die „Trennung" derselben von ihren störenden Umständen voraus. Wir sehen also, daß der Prozeß der fortschreitend genaueren Realisierung der verschiedenen Elementarvorgänge gleichzeitig ein Prozeß ist der fortschreitend immer schärferen manuellen Trennung der einzelnen Vorgänge voneinander (Separationsprozeß).

Auf dem genannten Nullpunkte bilden alle Vorgänge überhaupt noch ein einziges Ganzes. Der genannte Prozeß zerlegt dieses Ganze in immer schärfer getrennte Teile, und die Art der Trennung wird durch das Machsche Ökonomieprinzip vorgeschrieben. So könnte man populär etwa kurz den Separationsprozeß charakterisieren.

7. Wir können also bisher als Resultat der Überlegungen dieses Paragraphen festhalten: Wir haben gefunden, daß es ausgehend vom sogenannten vorwissenschaftlichen Standpunkte gelingt auf Grund des Prinzipes der Genauigkeitsschichten und ausgehend vom starren Körper als erstem Elementarvorgang, die Elementarvorgänge immer genauer zu realisieren, und so die Übereinstimmung zwischen dem logischen und dem manuellen Urbau immer genauer zu machen. Das dabei immer mehr angenäherte aber nie erreichte Ziel ist die absolute Übereinstimmung zwischen beiden, die absolute Realisierung sämtlicher Elementarvorgänge.

8. Untersuchen wir noch, inwieweit wir die Genauigkeit beurteilen können, die wir in einem momentanen von der Wissenschaft erreichten Stadium gemäß dem Prinzipe der Genauigkeitsschichten vorfinden und welche größer ist gemäß diesem Prinzipe als jemals früher.

Wir sagten, daß wir die momentane Genauigkeit der Realisierung eines Elementarvorganges beurteilen nach der Größe der Abweichungen, die er zeigt von seinen apriorischen Gesetzen. Die Feststellung, Messung dieser Größe geschieht aber entweder direkt oder indirekt mittels des starren Körpers, da dieser, wie wir sahen, bei allen Vorgängen der Wirklichkeit eine Rolle spielt. Dieser aber unterliegt selbst dem Prinzipe der Genauigkeitsschichten. Die Beurteilung der in der Realisierung des betreffenden Elementarvorganges erreichten Genauigkeit ist also keine absolute, sondern beruht auf einem Vergleich mit der in der Realisierung anderer Vorgänge erreichten Genauigkeit, in letzter Linie mit dem starren Körper. Wir können also etwa sagen: Die gewünschte Beurteilung kann stets nur in der Form ausgesprochen werden: In der Realisierung des betreffenden Vorganges haben wir **im Vergleich** zum starren Körper die und die Genauigkeit erreicht.

9. Was nun die „Möglichkeit" der Realisierung eines Elementarvorganges anbelangt, so ergibt sich folgendes:

Nach dem Identitätssatze bedingt jede Änderung der Bedingungen eines Vorganges eine Änderung des Vorganges selbst. Um also für einen Elementarvorgang eine bessere, genauere Realisierung zu erreichen, werden wir seine Bedingungen derart variieren, daß er besser wird, — wie das schon dargelegt wurde. Da nun — ebenfalls nach dem Identitätssatze — jeder Vorgang, der einmal hergestellt wurde, auch wiederholt werden kann, so kann ein Rückschritt in der Realisierungsverbesserung nicht eintreten, sondern jeder Fortschritt, der durch Variation der Bedingungen erreicht wird, ist ein bleibender. Daß aber in der Tat ein steter Fortschritt in der Verbesserung der Realisierungen vorhanden ist, ergibt sich so: Nach unseren Untersuchungen ist zum mindesten der Fortschritt der Realisierung für den starren Körper sicher, damit aber auch für jeden Vorgang, für den der starre Körper wesentlicher Umstand ist; dies sind aber alle Vorgänge, wie wir sahen.

Nun könnte aber dieser Prozeß der Annäherung an die absolute Realisierung nicht gegen die absolute Realisierung, sondern gegen eine solche konvergieren, welche von der absoluten Realisierung um einen Betrag abweicht. Was wäre damit gesagt? Zunächst, daß bei unserer Realisierung stets noch störende Umstände vorhanden sein werden, welche sich nicht entfernen lassen. Da aber die störenden Umstände nichts anderes als Bedingungen des Gesamtvorganges sind, so würde man die genannte Möglichkeit auch so ausdrücken können, daß stets Umstände vorhanden sein werden bei dem betreffenden Vorgange, welche sich nur innerhalb bestimmter Grenzen variieren lassen.

Daß aber letzteres nicht möglich ist, läßt sich etwa folgendermaßen plausibel machen: Nehmen wir an, ein solcher Umstand lasse sich nur bis zu einer bestimmten Grenze variieren, so daß er also stets in einem bestimmten Maße vorhanden sei bei Vorgängen, wo er als störender Umstand auftritt, und von diesen nicht getrennt werden kann. Wollen wir dann für diesen Umstand selbst seinen Elementarvorgang aufstellen, so müssen also die Bedingungen dieses Umstandes selbst variiert werden. Nach dem, was wir aber von ihm voraussetzten, und nach dem Identitätssatze müssen also auch unter diesen Umständen solche sein, welche einer ähnlichen Beschränkung unterliegen, wie der Umstand selbst. Für die Umstände dieser Umstände gälte das gleiche, und wir würden statt eines eine unendliche Reihe von Umständen bekommen, welche derart beschränkt sind. Es würden sich also sämtliche Umstände in zwei Klassen spalten, die eine, deren Umstände beschränkt sind, die andere, deren Umstände unbeschränkt sind in der Variabilität. Nun können wir aber auch zeigen, daß in der ersten Klasse überhaupt keine beliebig variablen Umstände vorkommen. Denn, ist ein Umstand Bedingung eines anderen, dann gilt das, wie aus dem Identitätssatze folgt, auch umgekehrt; ist also der eine Umstand nicht beliebig variabel, dann auch nicht der andere, d. h. nehmen wir irgendeinen Umstand der ersten Klasse, dann sind auch alle seine Umstände nur beschränkt variabel, also wäre dies z. B. auch der starre Körper. Da dieser aber unser Vergleichsumstand ist, so ist diese Annahme sinnlos.

Im übrigen wird die Realisierung eines Elementarvorganges leichter erscheinen, wenn die Annäherung gewissermaßen von zwei Seiten aus stattfindet, d. h. auf Grund der störenden Umstände die Abweichung vom Elementarvorgange manchmal nach oben, manchmal nach unten stattfindet. Schwieriger scheint die Realisierung gelegentlich zu sein[1], wenn die Annäherung nur von einer Seite stattfindet, wie das z. B. beim absoluten Nullpunkt, beim perpetuum mobile, beim Carnotschen Kreisprozeß u. a. der Fall ist.

Aber, selbst wenn die erreichbaren Verbesserungen der Realisierungen klein sind, so wird dies unschädlich gemacht durch die Exhaustion. Selbst wenn wir nicht alle Bedingungen des Vorganges nach Belieben variieren können, so können wir doch wenigstens die Bedingungen selbst finden, und so den Vorgang in eine Reihe entwickeln, erklären, und damit ist für das betreffende Gebiet wenigstens die Analyse erreicht, wenn auch die Synthese noch beschränkt ist, da die einzelnen Bedingungen noch nicht beliebig variiert werden können.

## § 12. Die Messung.

1. Wenn wir auch das wesentliche zur Lösung unserer Probleme im vorstehenden bereits dargelegt haben, so müssen wir uns doch wegen der späteren Anwendung auf die Geometrie noch mit einer Tätigkeit beim Aufbau der Wissenschaft noch besonders beschäftigen, mit dem „Messen", der „Messung".

Ein Punkt, wo bei dem Aufbau der Wissenschaft die Messung in Frage kommt, ist nach unseren Darlegungen der, wo festgestellt wird, inwieweit ein gegebener Vorgang dem betreffenden Elementarvorgang entspricht. Eine weitere Bedeutung hat die Messung in der rein manuellen Forschung, wie wir das noch näher sehen werden.

[1] d. h. der Abstand von der absoluten Realisierung scheint im Verhältnis zu anderen Realisierungen größer in manchen Fällen.

2. Was wir messen, ist ein Vorgang. Die manuelle Vorrichtung, welche das Messen ermöglicht, nennen wir den Apparat. Gemessen wird an einer Skala; die Zahl, welche wir durch die Messung erhalten, das Resultat der Messung, nennen wir die Ablesung. Den Vorgang, der gemessen wird, wollen wir auch kurz als die Erscheinung bezeichnen.

Es sei schon hier darauf aufmerksam gemacht, daß Erscheinung, Apparat und Messung einen Gesamtvorgang bilden. Das, worauf wir dabei besonders achten, ist die Ablesung, und die Aufgabe der Verwertung dieser Messung besteht darin, diese Ablesung zu erklären, und nicht etwa die Erscheinung selbst. Wir betrachten es also als unsere Aufgabe, die Ablesung zu erklären.

3. Unter „Erklären" verstehen wir (Kap. II, § 6) die Entwickelung in eine Reihe, die Zerlegung der Ablesung in die einzelnen Beiträge, welche die verschiedenen Teile des Gesamtvorganges der Messung liefern.

Diese Beiträge rühren nun her:

a) von Umständen, deren Einwirkung auf die Ablesung nach a priorischen Gesetzen bestimmbar (berechenbar) ist;

b) von Umständen, deren Einwirkung auf die Ablesung nach sogenannten empirischen, d. h. nur manuell erforschten Gesetzen bestimmbar ist;

c) von unbekannten oder in ihrer Wirkung nicht bekannten Umständen.

Wir umfassen also bekannte und unbekannte Umstände, so daß die Disjunktion eine vollständige ist. Bezeichnen wir die Beiträge von a) mit $\sum\limits_{1}^{n_1}\alpha_i$; die Beiträge von b) mit $\sum\limits_{1}^{n_2}\beta_i$; die Beiträge von c) mit $v$, so können wir für die Ablesung $a$ schreiben:

$$a = \sum_{1}^{n_1}\alpha_i + \sum_{1}^{n_2}\beta_i + v$$

Wir können das etwa so aussprechen: Jede Ablesung wird entwickelt in die Summe der Einflüsse der a priorischen Gesetze, die der empirischen Gesetze und die unbekannten Einflüsse.

Das nächstliegende Bestreben geht dabei dahin, das Glied $v$ möglichst klein zu machen. Sind die wesentlichen Umstände der betreffenden Messung bekannt, sowie deren Gesetze a priorisch oder empirisch bekannt, so bedarf es nach dem Identitätssatze nur der Konstanterhaltung der wesentlichen Umstände, um $v$ möglichst klein zu machen.

4. Bisher haben wir ganz allgemein die Behandlung einer Messung dargelegt, indem wir die Beiträge der einzelnen Umstände zur Ablesung völlig unparteiisch behandelten. Die Messung war uns dabei ein Vorgang, wie ein anderer auch, der seiner Erklärung durch Zerlegung in seine Elementarvorgänge entgegengeführt wurde.

Nun aber wird eine Messung im allgemeinen in einer bestimmten Absicht, zu einem bestimmten Zwecke unternommen. Diese Absicht wird zum Ausdrucke gebracht, indem man eines oder mehrere Glieder der Entwickelung von $a$ als unbekannt, die übrigen als bekannt ansieht. Diese Betrachtungsweise erst führt uns zu der gewohnten Betrachtungsweise der Messung und zu ihr wollen wir uns daher jetzt wenden.

Wir werden hier zwei Fälle haben, je nachdem wir eines der $\alpha_i$ oder eines der $\beta_i$ als Unbekannte ansehen.

5. Zunächst also sei eines der $\alpha_i$ als unbekannt angenommen. Dies bedeutet, wir können den Wert $\alpha_i$ im voraus auf Grund a priorischer Gesetze berechnen, und wollen nun messen, welchen Wert wir bei der Messung tatsächlich erhalten.

Wir machen also unsere Ablesung $a$, entfernen durch Exhaustion die Beiträge aller übrigen bekannten Gesetze („bringen die nötigen Korrekturen an", wie man zu sagen pflegt) und bezeichnen die Gesamtwirkung dieser störenden Umstände mit $u$, dann ist der erhaltene Wert der Erscheinung:

$$a - u = \alpha_i + v$$

Da $\alpha_i$ der vorher bekannte Wert ist, so gehört $v$ noch unberücksichtigten störenden Umständen an, und wir können sagen:

Wird ein a priorisch bekannter Wert gemessen, so bezeichnen wir die Differenz zwischen dem gemessenen und errechneten Werte als Messungsfehler[1] (besser vielleicht: Versuchsfehler).

Betrachten wir nun den gleichen Vorgang nochmals unter dem Gesichtspunkte, daß das betreffende a priorische Gesetz[2] durch die Messung geprüft, bewiesen werden solle.

Je nach der Sorgfalt, mit der das einzelne solche Experiment angestellt wird, kann der Messungsfehler sehr verschieden sein. Betrachte ich lediglich das Gesamtresultat der Messung bei mehreren Versuchen, so habe ich keinen Anhaltspunkt, welches dieser Resultate das richtige sei. Anders, wenn ich die Umstände der Messung in Betracht ziehe (d. h. des bei der Messung angestellten Experimentes). Wenn ich sage, „in diesem Falle sind die Umstände besser als in jenem, also muß auch dieser Messungswert besser sein als jener", so kann dieser Satz nur auf der Kenntnis beruhen, welche Umstände für den Ausfall meines Experimentes schlechter, welche besser sind. Das heißt aber nichts anderes, als daß ich darnach strebe, die Umstände in einer bestimmten Richtung zu beeinflussen oder wenigstens solche Umstände zu suchen, in denen mein Messungsresultat ein besseres wird. Schon diese Überlegung zeigt aufs deutlichste, daß auch ein Forscher, welcher auf dem Standpunkte des reinen Experimentalisten (§ 4 dieses Kapitels) steht, um zwei Messungswerte als besser oder schlechter unterscheiden zu können, von vornherein bestimmte Urteile haben muß darüber, welche Umstände für sein Experiment gut, welche schlecht sein werden. Und da er, um einen möglichst genauen Wert in seinem Experiment zu erhalten, darauf hinarbeiten wird, die schlechten Umstände dabei auszuschalten, so sehen wir, daß der rein ex-

[1] oder auch als Maß der „Versuchsgenauigkeit".

[2] welches den Wert $\alpha_i$ liefert.

perimentalistisch denkende Forscher genau das gleiche tut, was wir als Realisierung von Elementarvorgängen bezeichneten: Er sucht einen ganz bestimmten Vorgang manuell mehr und mehr aus „störenden Umständen" herauszuarbeiten. Der ganze Unterschied zwischen seinem Vorgehen und dem Vorgehen zur Realisierung von Elementarvorgängen ist der, daß dasselbe Ziel, welchem beide zustreben im ersten Falle mehr oder weniger unbewußt, im zweiten bewußt verfolgt wird. Der manuelle Erfolg ist in beiden Fällen natürlich genau der gleiche.

Wir können also zunächst einmal festhalten: Es ergibt sich, daß die Operationen, welche manuell vorgenommen werden zur Realisierung eines Elementarvorganges praktisch genau die gleichen sind, wie die, welche der experimentelle Forscher vornimmt, um nach experimentalistischer Anschauung ein möglichst „fehlerfreies" Experiment zu machen.

Ferner aber können wir aus dem dargelegten schließen: Es ist unmöglich, ein a priorisches Gesetz experimentell zu prüfen oder zu beweisen. Denn das Resultat eines zu diesem Zwecke angestellten Experimentes sagt mir lediglich, wie genau im vorliegenden Falle der betreffende Elementarvorgang realisiert ist, d. h. das einzelne Experiment sagt nichts über den allgemeinen Fall, sondern nur über den momentan vorliegenden Fall etwas aus[1].

[1] Der Unterschied im Vorgehen eines experimentalistisch denkenden Forschers und dem Vorgehen bei der Realisierung eines Elementarvorganges beruht also, wie aus obigem hervorgeht, lediglich in einer Änderung des Standpunktes. So wenig diese Änderung des Standpunktes im einzelnen Falle an dem manuellen Ergebnisse etwas ändert, so wichtig kann sie für das theoretische Weiterdenken, insbesondere für den mathematischen Ansatz werden, worauf wir im nächsten Paragraphen noch zu sprechen kommen werden. Man könnte die Folgen der Änderung des Standpunktes an Hunderten von Beispielen zeigen (siehe z. B. § 8 dieses Kapitels), doch würde dies hier zu weit führen. Wir müssen hier darauf hinweisen, daß Herr W. Ostwald bei seinen Untersuchungen über die Grundlagen der

Diesen Satz können wir auch so aussprechen: Prüfen wir ein a priorisches Gesetz durch Messung, so gibt uns das Resultat die Genauigkeit an, mit der der betreffende Elementarvorgang realisiert wurde, und zwar ist die Differenz zwischen dem gemessenen und dem a priorischen Werte, der Messungsfehler, das Maß dieser Genauigkeit.

6. Sehen wir andererseits eines der $\beta_i$ als unbekannt an, dann ergibt sich folgendes: Haben wir alle uns bekannten Korrekturen $u$ an der Ablesung $a$ angebracht, dann erhalten wir folgenden Wert:

$$a - u = \beta_i + v$$

Da wir nun hier kein a priorisches, sondern, wie man etwa sagen kann, ein empirisches Gesetz vor uns haben, so weiß ich über die Größe von $\beta_i$ nichts a priori. Ich kann also die Beobachtung $(\beta_i + v)$ nicht in den eigentlichen Wert und den Messungsfehler zerlegen wie in Nr. 5.

Wie können wir nun trotzdem etwas über die Beobachtung aussagen? Wiederhole ich die gleiche Messung mehrere Male während ich alle diejenigen ihrer Umstände möglichst konstant halte, welche ich beeinflussen kann, dann zeigt mir die mehr oder minder große Konstanz der Resultate

a) inwieweit mir diese Konstanthaltung gelungen ist,

b) ob nicht Umstände konstant zu halten versäumt wurden.

Finde ich nun tatsächlich die Serie dieser Messungen sehr konstant, dann kann ich schließen, daß ich wahrscheinlich sämtliche wesentlichen Umstände der Erscheinung bei der Konstanthaltung berücksichtigt habe.

---

Chemie schon früher erkannte, daß die sogenannten chemischen Grundgesetze nicht auf einem experimentellen „Befragen der Natur" beruhen, sondern dadurch zustande kommen, daß durch zielbewußtes Ausschalten störender Umstände bestimmte Vorgänge manuell hergestellt werden (Elementarvorgänge), (s. „Elemente und Verbindungen", Faraday-Vorlesung. Leipzig 1904), die dann den betreffenden a priorischen Gesetzen gehorchen. Er war damit wohl der erste, der einen Fall der Anwendung dieser Forschungsprinzipien aufzuzeigen in der Lage war.

Nun erhebt sich die Frage, welches ist das Verhältnis einer derartigen Messung zu einer der in Nr. 5 besprochenen Art? Haben wir einen Vorgang, dessen Elementarvorgänge nebst ihren Gesetzen noch unbekannt sind, so weit manuell erforscht, daß es uns gelingt, denselben konstant zu halten, dann können wir sagen, daß dieses konstant bleiben auch so ausgesprochen werden kann, daß es uns gelingt, störende Umstände, welche den Vorgang ändern könnten, von ihm fernzuhalten. Wäre also dieser Vorgang ein Elementarvorgang, dann wäre uns damit die Realisierung dieses Elementarvorganges gelungen.

Nun brauchte er ja aber nicht ein einfacher Elementarvorgang zu sein, sondern irgendwie könnte er aus Elementarvorgängen zusammengesetzt, ein Elementarvorgang höherer Ordnung, sein. Würden wir also wissen, aus welchen Elementarvorgängen und wie er aus diesen zusammengesetzt wäre, dann könnten wir als das Resultat unserer manuellen Tätigkeit aussprechen, daß uns die Realisierung dieses zusammengesetzten Elementarvorganges gelungen sei. Würden wir diese Zusammensetzung des betreffenden Vorganges aus Elementarvorgängen also wissen, dann könnten wir auch das a priorische Gesetz des betreffenden Vorganges aus dieser Kenntnis herleiten, während uns dies anderen Falles unbekannt ist. Und daraus ergeben sich nun die bekannten Erscheinungen solcher empirischer Gesetze.

Untersuchen wir nämlich manuell, experimentell das Gesetz des betreffenden Vorganges, so erhalten wir einige Messungswerte, aber niemals das ganze Gesetz. Nun kann man versuchen, ein derartiges ganzes Gesetz zu finden durch Inter- und Extrapolation aus den gefundenen Werten. Aber da unsere Beobachtungen niemals absolute Genauigkeit haben (§ 11 dieses Kap.), so können wir auf diesem Wege zwar ein Gesetz der Erscheinung erhalten, welches recht nahe dem a priorischen kommt, doch ist es unwahrscheinlich, daß wir gerade das a priorische treffen, und wenn wir es träfen, so hätten wir doch nicht die absolute Gewißheit, daß, falls später die Zerlegung des Vorganges in Elementarvorgänge gelänge, das daraus abgeleitete a priorische Gesetz mit unserem übereinstimme.

Zusammenfassend können wir also etwa sagen: Durch Messung und darauffolgende Inter- und Extrapolation werden sogenannte empirische Gesetze aufgestellt von Vorgängen, deren Zusammensetzung aus Elementarvorgängen, oder deren Elementarvorgänge überhaupt uns noch nicht bekannt sind. Die dabei gefundenen Messungswerte lassen aus ihrer Konstanz bei wiederholten Messungen ersehen, ob uns das Freihalten des Vorganges von störenden Umständen gelingt, die Messungswerte selbst werden gemäß dem Prinzip der Genauigkeitsschichten immer besser werden, so daß ihr Abweichen von dem durch Zerlegung in seine Elementarvorgänge aufzustellenden a priorischen Gesetze des Vorganges immer geringer wird. Jedoch ist dieses a priorische Gesetz selbst durch die Messung allein nie mit Sicherheit auffindbar.

7. Auf einen Punkt dieser letzten Ausführungen wollen wir noch einen besonderen Blick werfen. Wir haben in Nr. 5 die Differenz zwischen dem gemessenen und dem nach dem a priorischen Gesetze errechneten Werte als das Maß für die Messungsgenauigkeit definiert. Fragen wir uns, ob und wie wir bei einem empirischen Gesetze einen analogen Begriff einer Messungsgenauigkeit aufstellen können. Betrachten wir einen bestimmten Wert, der eine Anzahl von Malen gemessen wurde. Wären die Umstände dieser Messungen, wie es das Erstrebenswerte wäre, absolut konstant gewesen, dann hätten wir als Resultat der Messungen jedesmal absolut den gleichen Wert erhalten. Das, was die tatsächlichen Messungen uns zeigen, ist also lediglich das, inwieweit die wesentlichen Umstände der Messung konstant geblieben waren während der Messungen. Zunächst also können wir bei solchen Messungen von einer Genauigkeit nicht sprechen, da wir keinen

„richtigen Wert“ haben, dem gegenüber ein anderer genauer oder nicht so genau sein kann.

Jedoch gelingt es einen derartigen Vergleichswert zu schaffen auf Grund folgender Überlegung: Wenn wir alle uns zugänglichen Bedingungen des Vorganges konstant halten, so können die Verschiedenheiten der Messungsresultate nur von Umständen herrühren, welche nicht konstant gehalten werden. Sehen wir von allen Umständen, welche sich ändern, ab, dann bleiben die konstant bleibenden Umstände übrig. Und die Gesamtheit der konstant bleibenden Umstände definiert uns eine genaue Realisierung irgendeines Vorganges. Sind nun alle nicht konstant bleibenden Umstände so beschaffen, daß sie sich auch tatsächlich ganz beliebig und frei verändern, dann werden sich die Messungsresultate so darstellen, daß sie ganz regellos um den konstanten Wert des aus den konstanten Bedingungen bestehenden Vorganges herumschwanken. Nehmen wir nun das arithmetische Mittel der gemessenen Werte, so erhalte ich damit einen Wert, der befreit ist von der Einwirkung derjenigen veränderlichen Umstände, deren Schwankungen nach beiden Seiten des Mittelwertes sich während meiner Beobachtungen gerade aufhoben. Je mehr Beobachtungen ich also in regellosen Zeitzwischenräumen mache, desto größer wird die Wahrscheinlichkeit, daß alle veränderlichen Umstände unter diejenigen fallen, deren Wirkung ausgeschaltet wird, desto genauer erhalte ich den Wert des konstanten Vorganges. Auf Grund dieses Mittelwertes kann ich dann etwa einen gewissen Genauigkeitsbegriff definieren[1].

[1] Das Maß dieser Genauigkeit kann verschieden definiert werden. Als Grundsatz gilt (s. Helmert, Die Ausgleichungsrechnung und die Methode der kleinsten Quadrate. 2. Aufl. 1907 p. 18): „Man wird eine Beobachtungsreihe als genauer ansehen als eine andere, wenn bei ihr vergleichsweise größere Fehler weniger häufig eingetreten sind, als bei dieser.“ Leider ist es hier nicht möglich, auf alle aus den obigen Darlegungen folgenden interessanten Konsequenzen für die Theorie der Messung näher einzugehen.

## § 13. Zusammenfassung.

1. In § 10 dieses Kapitels hatten wir den Zusammenhang zwischen der Wirklichkeit und den mathematischen Gesetzen (der Logik) untersucht auf Grund des Vorhergegangenen und hatten dieses Problem lösen können unter der Voraussetzung, daß die Elementarvorgänge manuell absolut realisierbar seien. In § 11 hatten wir nun gesehen, daß diese Vorraussetzung tatsächlich nicht zutrifft. Es bleibt uns zu zeigen, wie wir trotzdem auf Grund der beiden letzten Paragraphen das Problem lösen können.

2. Dieser Nachweis ist nicht schwer. Wir haben nämlich nur an Stelle der genannten Voraussetzung in § 10, daß es uns gelinge, die Elementarvorgänge absolut zu realisieren, sowie die Vorgänge der Wirklichkeit absolut in ihre Elementarvorgänge zu zerlegen, den folgenden Satz einzuführen, welcher die tatsächlichen Verhältnisse ausspricht: A u s g e h e n d v o m s o g e n a n n t e n v o r w i s s e n s c h a f t l i c h e n S t a n d p u n k t e g e l i n g t e s u n s d i e E l e m e n t a r v o r g ä n g e g e m ä ß d e m P r i n z i p d e r G e n a u i g k e i t s s c h i c h t e n i m m e r g e n a u e r z u r e a l i s i e r e n, u n d e b e n s o d i e V o r g ä n g e d e r W i r k l i c h k e i t i n i h r e E l e m e n t a r v o r g ä n g e z u z e r l e g e n. D e r Z i e l p u n k t d i e s e s P r o z e s s e s, d e r e r s t i m U n e n d l i c h e n[1] e r r e i c h t w i r d, i s t d i e a b s o l u t e R e a l i s i e r u n g d e r E l e m e n t a r v o r g ä n g e. Man erkennt dann leicht, daß an der ganzen in § 10 gegebenen Darlegung nichts geändert zu werden braucht, als daß überall, wo von „absoluter Realisierung" die Rede ist, von einer „gemäß dem Prinzipe der Genauigkeitsschichten immer genauer werdenden Realisierung" zu sprechen ist.

3. Damit sind nun die eingangs des Kapitels gestellten Aufgaben in ihren Konturen wenigstens gelöst, und wir können die erhaltenen Resultate vielleicht in folgender kurzen Form zusammenfassen:

Nachdem wir uns auf Grund des Identitätssatzes von der

---

[1] D. h. nie.

manuellen Beherrschbarkeit der Wirklichkeit überzeugt hatten, fanden wir, daß unser Bestreben darauf gerichtet sein muß, die Wirklichkeit in Elementarvorgänge zu zerlegen und diese Elementarvorgänge manuell zu realisieren. Diese Elementarvorgänge waren dadurch charakterisiert, daß sie in bestimmter Weise einfachste waren, und bestimmten einfachsten a priorischen Gesetzen gehorchten, durch welche die Anknüpfung der Mathematik an die Wirklichkeit bewirkt wird. Die Übereinstimmung der Wirklichkeit mit diesen a priorischen Gesetzen wird dann dadurch erreicht, daß eben versucht wird, diejenigen Vorgänge manuell herzustellen, welche nach diesen Gesetzen verlaufen, was durch manuelles Experiment (Messung) festgestellt wird. Es handelt sich dabei lediglich um einen manuellen Abgrenzungs-(Separations-)prozeß einer Erscheinung gegen andere (störende Umstände). Diese Abgrenzung findet auch in dem Falle statt und zwar dann auf logischem Weg, wenn dieselbe manuell nicht durchführbar ist (Exhaustion).

Die manuelle Herstellung geschieht auf dem Wege eines Approximationsverfahrens, welches wir das Prinzip der Genauigkeitsschichten nannten, und führt automatisch zur manuellen Herstellung von Vorgängen, welche immer genauer den a priorischen Gesetzen gehorchen. In gleicher Weise wird die Zerlegung von Vorgängen der Wirklichkeit in Elementarvorgänge auf demselben Wege immer genauer.

Da verwickeltere Vorgänge aus den Elementarvorgängen sich zusammensetzen, so gelten auch für diese die entsprechenden a priorischen Gesetze immer genauer und somit das, was eben über manuelle Herstellung (Realisierung) gesagt wurde. Auf diese Weise löst die Wissenschaft ihre beiden großen Aufgaben der Analyse und Synthese, der Erklärung und des Beherrschens.

4. Wir dürfen noch kurz auf eine wichtige Konsequenz der Methode der Elementarvorgänge hinweisen. Da die Elementarvorgänge eines Gebietes, wie wir kurz sagten, die „einfachsten" sind, so sind sie geeignet, alle überhaupt mög-

lichen Vorgänge des Gebietes durch ihre Zusammensetzung herstellen zu lassen. Diese aus der Art dieser Methode fließende Selbstverständlichkeit ist deshalb beachtenswert, weil sie zeigt, daß wir durch diese Methode theoretisch zur Beherrschung aller Vorgänge gelangen können, daß keiner sich uns entziehen kann.

5. Schließlich wollen wir noch kurz die Frage berühren, welches Recht wir für die aufgezeigte Methode in Anspruch nehmen dürfen. Wir konnten diejenige Methode im Vorstehenden aufweisen, welche uns erlaubt, die Aufgaben der Analyse und Synthese in der Wirklichkeit zu erledigen. Dabei ergab sich, daß diese Methode genau die gleiche war, welche wenig bewußt stets schon ausgeübt wurde. Nur war man sich aus Unkenntnis der wahren Beschaffenheit der Methode nicht im klaren, inwieweit die mathematischen Gesetze, mit denen man die Vorgänge der Wirklichkeit „beschrieb" (wie Kirchhoff und Mach sagen) als wirklich „gültig" angenommen werden dürften. Wenn auch diese Unklarheit im allgemeinen den Fortschritt der Wissenschaft nicht aufhielt, so gab es doch eine Reihe von Stellen in der Wissenschaft (und diese haben sich insbesondere in letzter Zeit sehr vermehrt), wo eine Aufklärung darüber außerordentlich wünschenswert war. Wir haben gerade in der Geometrie ein solches Beispiel vor uns, deren Grundfrage genau auf das genannte Problem hinausläuft. Dies ist die Ursache, welche hier die Untersuchungen nötig machte, die wir im vorliegenden Kapitel anstellten. Aber die Geometrie ist nur ein erstes Beispiel für dieses Problem, welches jenes ganze große Gebiet durchzieht, das auf den Anwendungen der Mathematik auf die Wirklichkeit beruht.

Die genannte Unklarheit ist nun nach den vorstehenden Untersuchungen hebbar; es konnte gezeigt werden, daß und wie Gesetze erhalten werden können, deren Geltung als absolut angesehen werden darf, sowie, in welcher Weise sich diese Gesetze von anderen (sog. empirischen) unterscheiden, von denen das nicht gesagt werden darf. Da, wie wir sahen, die manuelle Wissenschaft durch die obigen Resultate in keiner Weise geändert wird, so kann der Erfolg der vorstehenden Überlegungen nur darin beruhen, daß sie diejenigen Begriffsbildungen anwenden, welche den Tatsachen am angemessensten sind, sie am besten „beschreiben". Diese Begriffsbildungen sind nun aber das Werk einer langen und intensiven wissenschaftlichen Entwickelung, die wir natürlich nicht im Detail hier darlegen können, deren Hauptzüge jedoch anzugeben unsere Pflicht ist. Dieser wollen wir im folgenden Paragraphen zu genügen suchen.

## § 14. Frühere Autoren.

Wir haben schon in § 4 des vorliegenden Kapitels die Hauptgruppen kurz vorgeführt, in die man die früheren Untersuchungen über das hier behandelte Problem teilen kann. Es waren das die beiden großen Gruppen der Idealisten und der Experimentalisten. Schließlich fanden wir in E. Mach den Vertreter einer Richtung, welche durch möglichst vorurteilsloses Zurückgehen auf die Tatsachen natürlich alles das in sich zu vereinigen begann, was in den Anschauungen der Idealisten und Experimentalisten auf wirklichen Tatsachen beruhte. Damit wurden diese Untersuchungen der Wissenschaftslehre aus dem Gebiete der Spekulation herausgerückt und begannen eine wirkliche Wissenschaft zu werden.

Diesen letzteren Prozeß nun wollen wir uns noch etwas mehr im einzelnen vorführen, indem wir wichtige Untersuchungen einzelner Autoren uns etwas vergegenwärtigen. Es ist dabei irgendeine Vollständigkeit weder im vorliegenden Rahmen möglich noch auch beabsichtigt, da es uns hier nur darauf ankommt, eine Skizze der genannten Entwickelung zu erhalten.

Wie wir schon in der Einleitung zu diesem Kapitel andeuteten, war es Herr F. Klein, der ganz abgesehen von irgendwelchen philosophischen Gesichtspunkten das Wesen des Unterschiedes zwischen der reinen und der sogenannten angewandten Mathematik erkannte.

Er war, wie es scheint, der erste, welcher in dem Gutachten zur Beneke-Preisaufgabe in exakter Fassung das Problem der angewandten Mathematik, oder anders ausgedrückt, die Frage der Genauigkeit aufwarf, mit der wir unsere mathematisch-logischen Sätze auf die Wirklichkeit anwenden dürfen[1].

Der Weg, auf dem Herr F. Klein zu der genannten Fragestellung gelangte, läßt sich etwa so andeuten: Von der im Erlanger Programm ausgesprochenen Ansicht (s. Kap. I, § 2, Anm.) aus wird in dem Aufsatze „Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve"[2] die Frage nach der „Genauigkeit" behandelt, mit der sich eine analytisch gegebene Kurve empirisch darstellen lasse und umgekehrt, wobei von der Tatsache, daß niemals eine absolute Übereinstimmung erreichbar sei, wesentlicher Gebrauch gemacht wird. 1898 faßt Herr Klein seine Theorie des Zusammenhanges zwischen Theorie und Wirklichkeit in folgender Weise zusammen[3]: „Es handelt sich um einen Prozeß, den wir in genau derselben Weise bei der theoretischen Behandlung irgendwelcher empirischer Daten immerzu vollziehen und der eben darum dem Naturforscher völlig selbstverständlich erscheinen mag. Ich werde mich in allgemeiner Fassung so ausdrücken: Die Ergebnisse irgendwelcher Beobachtungen gelten immer nur innerhalb bestimmter Genauigkeitsgrenzen und

[1] Math. Annalen 55. 1902 p. 147. F. Klein frägt: „In welcher Form hat dies zu geschehen? (nämlich ‚die arithmetisierte Mathematik als Ausgangspunkt für die quantitative Beherrschung der Außenwelt festzuhalten'). Und welche Erleichterungen darf man sich gestatten, wenn man von den Resultaten wieder nur begrenzte Genauigkeit verlangt?"

[2] Math. Ann. 22.

[3] „Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anläßlich der ersten Verteilung des Lobatschefsky-Preises." Math. Ann. 50. 1898 p. 585.

unter partikulären Bedingungen; indem wir die Axiome aufstellen, setzen wir an Stelle dieser Ergebnisse Aussagen von absoluter Präzision und Allgemeinheit." In dieser „Idealisierung der empirischen Daten liegt meines Erachtens das eigentliche Wesen der Axiome. Unser Gesetz ist dabei in seiner Willkür zunächst nur dadurch beschränkt, daß es sich den Erfahrungstatsachen anschmiegen muß und andererseits keine logischen Widersprüche einführen darf. Es tritt dann als Regulator noch dasjenige hinzu, was Mach die ‚Ökonomik des Denkens' nennt". „Jedermann wird für praktische Zwecke die Formeln der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie und nicht etwa diejenigen der Lobatschefskyschen Geometrie in Anwendung bringen". Als eine konsequente Darstellung der l. c. vorgetragenen Auffassung der Geometrie werden Herrn Paschs „Vorlesungen über neuere Geometrie"[1] genannt[2].

An die genannten Arbeiten schließen sich dann zwei Schriften F. Kleins, welche speziell unserem Probleme gewidmet sind. „Das Gutachten zur Beneke-Preisaufgabe"[3] und die autographierte Vorlesung „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien"[4]. Nachdem wir auf die erste schon eingangs dieses Kapitels hingewiesen, müssen wir uns hier mit der zweiten näher befassen.

In der letzten der genannten beiden Schriften gibt Herr Klein eine eingehendere Darlegung seiner Anschauungen. Nachdem die Unmöglichkeit einer absoluten Übereinstimmung von Theorie und Wirklichkeit behandelt ist, heißt es (p. 42):

„Wie kommen wir nun dazu, ein solches Gesetz als absolut genau zu formulieren, und die Abweichungen störenden Einflüssen bzw. Beobachtungsfehlern zuzuschreiben?

Es kommt hier ein neues Prinzip in Betracht, das soge-

[1] Leipzig 1882.
[2] l. c. p. 596.
[3] Math. Ann. 55 (1902) p. 143 f.
[4] Leipzig 1902.

nannte Prinzip der Einfachheit der Naturerklärung oder der Ökonomie des Denkens (Mach), das sich in dem vorliegenden Falle so aussprechen läßt:

Bei der Aufstellung der Naturgesetze greift man (nicht erst auf Grund ausdrücklicher Überlegung, sondern unwillkürlich) nach den einfachsten Formeln, die die Erscheinung mit hinreichender Genauigkeit darzustellen vermögen".

Wir sehen aus dieser Stelle, wie außerordentlich nahe Herr Klein dem Exhaustionsprinzipe gekommen ist. Was noch im Wege stand, ergibt sich aus dem letzten Teile der Bemerkung, wie wir sofort sehen werden.

Wie schon früher dargelegt, mußte jede Theorie der von uns behandelten Erscheinungen, falls sie nämlich die vorhandenen Tatsachen wirklich verwerten wollte, jene beiden scheinbar so direkt sich widersprechenden Gruppen von Tatsachen, auf welche die Experimentalisten und Idealisten ihre Theorien gestützt hatten, gleichzeitig zu erklären erlauben. Und tatsächlich stellen alle neueren Ansätze zu einer solchen Theorie, soweit sie die vorhandenen Tatsachen berücksichtigen, ihrem wesentlichen Kerne nach den Versuch zu einer Vereinigung der beiden Tatsachengruppen dar. In dem eben angeführten Zitate nun gibt die experimentalistische Tatsachengruppe den Ausschlag, wie aus den Worten hervorgeht: „nach den einfachsten Formeln, die die Erscheinung mit hinreichender Genauigkeit darzustellen vermögen". Es ist also noch das einzelne Experiment, das zur Aufstellung des Gesetzes leitet, indem ich die einfachste Formel suche, welche die gemessenen Werte mit hinreichender Genauigkeit darstellt; während wir nunmehr wissen, daß es die einfachste Formel ist, nach deren Erfülltsein durch das Experiment wir die Genauigkeit des betreffenden Experimentes beurteilen[1]. Nichtsdestoweniger sehen wir, wie die Berücksichtigung der vorhandenen Tatsachen in der ge-

[1] Bei der experimentellen Behandlung apriorischer Gesetze.

nannten Schrift zu einer Theorie führt, welche außerordentlich nahe den wirklichen Sachverhalt trifft. Wir können sagen: Die Theorie Herrn Kleins fußt auf der Machschen Theorie, nur ist sie in einigen Richtungen mehr detailliert und verfeinert durch Berücksichtigung der charakteristischen Tatsachen, welche bei der Anwendung der Präzisionsmathematik auf die Wirklichkeit zutage treten.

Ähnliche Anschauungen über die behandelten Punkte unter besonders scharfer Herausarbeitung des Gegensatzes von Theorie und Praxis hat Herr Burkhardt ausgesprochen[1]. Es wird dabei ausdrücklich auf die praktische Unmöglichkeit einer rein empirischen Geometrie (wie sie Helmholtz[2] einmal als möglich beschrieben hat) eingegangen.

Wir führen noch ein paar verstreute Äußerungen E. Machs an, welche zeigen, wie tief dieser geniale Forscher in die Verhältnisse eingedrungen ist, wenn er auch auf manche der hier besprochenen Fragen nicht ganz das Gewicht legte, das ihnen, wie wir sahen, zukommt. „Dennoch operieren wir lieber und leichter mit diesen (den idealisierten) Begriffen, als mit anderen, welche genauer den Eigenschaften der Objekte entsprechen und nehmen dafür nachträglich auf die Abweichungen Rücksicht. Die theoretische Geometrie braucht diese Abweichungen überhaupt nicht zu beachten, indem sie eben Objekte voraussetzt, welche die Bedingungen der Theorie vollkommen erfüllen, wie die theoretische Physik. Außerdem hat aber die Geometrie noch den Vorteil, daß jede Abweichung ihrer Objekte von den Voraussetzungen der Theorie, welche man noch erkennt, auch beseitigt werden kann, . . ."[3] während, wie Mach fortfährt, die Physik dies z. B. nicht immer kann. Gerade diese letzte Bemerkung

[1] Mathematisches und naturwissenschaftliches Denken. Antrittsvorlesung. Jahrber. d. d. Math. Vergg. 11 (1902) pag. 49.

[2] Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze; Antwort gegen Herrn Professor Sand. Ges. wiss. Abh. II. p. 649.

[3] „Erkenntnis und Irrtum". 1905. p. 376.

zeigt den Unterschied von unseren Resultaten, resp. den in ihnen erreichten Fortschritt. „Die Vergleichung zwischen Theorie und Erfahrung kann mit der Verfeinerung der Beobachtungsmittel immer weiter getrieben werden“[1]. Man erkennt, wie weit diese Bemerkungen mit den von uns erhaltenen Resultaten übereinstimmen.

Nachdem wir früher schon auf die wichtigen Untersuchungen Herrn W. Ostwalds über den Zusammenhang zwischen Theorie und Praxis und über die Grundlagen der Chemie hinweisen konnten, in welchen er wohl als erster so weitgehende Einblicke in die manuelle Behandlung der Wirklichkeit bietet, hätten wir hier noch die „Vorlesungen über Naturphilosophie“ (1901) zu nennen[2]. Und diesen würden noch eine große Reihe von Schriften anzufügen sein, welche sämtliche auf das klarste den wissenschaftstheoretischen Standpunkt einnehmen, eine Fülle der wertvollsten Resultate und Bemerkungen für unsere Wissenschaft enthalten, und welche im Vereine mit E. Machs Schriften wohl hauptsächlich mitgewirkt haben, das heutige Interesse für diese Fragen zu wecken und wachzuerhalten.

Die angeführten Autoren scheinen uns den Entwickelungsgang unseres Problems des Zusammenhanges zwischen Theorie und Wirklichkeit innerhalb des betrachteten Zeitraumes bei Betrachtung unseres Zweckes genügend darzustellen, so daß wir alsbald zu dem nächsten größeren Fortschritt, der in der behandelten Richtung gemacht wurde, uns wenden können. Zwar sind wohl eine Reihe vorzüglicher Abhandlungen und Darstellungen aus unserem Gebiete, insbesondere auch von philosophischer Seite, erschienen in diesem Zeitraume (man sehe z. B. die in dem zuletzt zitierten

[1] „Die Mechanik in ihrer Entwickelung“. 4. Auflage. Leipzig 1901. p. 520.

[2] Hier spricht Ostwald z. B. p. 78 (2. Aufl.) davon, daß wir gewisse Gesetze in gewissem Sinne uns selbst geben. Ferner weist er p. 119 darauf hin, daß die Annahme der Unveränderlichkeit des starren Körpers die zweckmäßigste sei usw.

Werke Machs angeführte reiche Literatur), doch ist es unmöglich sie alle hier zu besprechen, auch glauben wir die sachlich wesentlichsten Fortschritte der behandelten Zeitperiode im obigen bereits ausreichend berührt zu haben.

Wir gelangen somit jetzt zu dem letzten großen Fortschritte, der in der Lösung unserer Probleme zu verzeichnen ist, und wollen diesen wiederum durch die Arbeiten jenes Autors, welcher diesen Fortschritt einleitete, charakterisieren: Henri Poincarés[1].

Poincaré bringt zuerst als ein ganz neues Moment „die konventionelle Festsetzung" in unsere Wissenschaft. Zwar waren schon vor ihm hin und wieder mehr oder weniger deutliche Anklänge hieran zu bemerken, aber er war der erste, welcher diesem Umstande einen geräumigen Platz in seiner Theorie einräumte und dieser Sache im einzelnen mit Eifer und systematisch nachzugehen suchte, und so die außerordentliche Bedeutung derselben für die ganze Wissenschaft erkannte. Der Weg, den Poincaré in seinem Gedankengange einschlägt, ist etwa der: Bei der Untersuchung der Axiome der Geometrie, analytischen Mechanik, theoretischen Physik usw. ergibt sich, das dieselben nicht „synthetische Urteile a priori" sein können, wie Kant meinte, da es Zeiten oder Menschen gab, wie uns historisch bekannt, welche an Stelle dieser Axiome andere für die richtigen hielten (z. B. Trägheitsgesetz bei den Griechen, das Parallelenaxiom der Experimentalisten usw.); ferner läßt sich durch eine eingehendere Analyse bei vielen dieser Axiome beweisen, oder zum mindesten äußerst wahrscheinlich machen, daß eine experimentelle Prüfung derselben

[1] Poincarés Studien über die behandelten Fragen liegen gesammelt vor in den drei Bänden:

„Wissenschaft und Hypothese", deutsch mit Anm. von F. u. L. Lindemann, Leipzig 1904.

„Der Wert der Wissenschaft", deutsch mit Anm. von E. u. H. Weber. 1906.

„Science et méthode", Paris, Flammarion 1908.

Wir werden diese drei Werke der Reihe nach mit „Poincaré I, II, III" im folgenden zitieren.

sinnlos ist, da wir zu dieser selbst schon des betreffenden Axiomes oder Satzes bedürften. Aus der so hergeleiteten Unrichtigkeit der beiden genannten Möglichkeiten, sowie im Zusammenhalt mit einigen anderen Gründen schließt Poincaré, daß die Axiome konventionelle Festsetzungen seien. Würde er hiebei stehen bleiben, so müßten wir ihn unserer Gruppe der reinen Idealisten zuzählen (wie das z. B. mit Le Roy geschehen muß, gegen den Poincaré a. a. O. polemisiert). Poincaré ergänzt diesen Satz aber in folgender Weise: Diese konventionellen Festsetzungen sind keine willkürlichen Festsetzungen[1], sie werden von zwei Umständen geleitet, einmal von den experimentellen Tatsachen (z. B. I. 51), andererseits vom Ökonomieprinzip, aus Gründen der Bequemlichkeit (z. B. II. 183. 184). Solche Festsetzungen nennt Poincaré auch „Prinzipien" (II. 184), außer ihnen gibt es noch „Gesetze", welche aus Erfahrungen abgeleitet sind, nie ganz genau sind, und in unendlicher Reihe durch immer „genauere" Gesetze ersetzt werden (II. 187f.); letztere Behauptung wird unter einem gewissen Vorbehalte gemacht. Diese Gesetze sind eventuell widerlegbar durch die Erfahrung und werden durch Induktion bewiesen, als Beispiel dient öfter das Gravitationsgesetz.

Dies etwa sind die Hauptpunkte von Poincarés Theorie, welche sich (verständlicherweise) nicht durch alle seine Schriften hindurch stets völlig gleich und konsequent bleibt. Er prüft dieselbe und bildet sie aus an einem außerordentlich großen Tatsachenmaterial, das ihm zu Gebote steht, und welches ihm Gelegenheit gibt, eine sehr große Menge genialer Einzelbeobachtungen und Bemerkungen aus unserem Gebiete aneinanderzureihen. So finden wir mehrere unserer im Vorhergehenden gewonnenen Sätze und Begriffsbildungen bei Poincaré an einzelnen Fällen spontan bemerkt[2], so z. B. kann man

[1] Siehe hierzu auch den Aufsatz des Verfassers: Jahrber. d. D. Math. Vergg. 17 (1908) p. 267f.

[2] Der Wahrheit halber muß Verfasser sagen, daß diese Fälle bei Poincaré ihm erst aufstießen, als seine allgemeine Sätze ihn auf sie aufmerksam machten.

die Bemerkungen I. 141 und II. 177. 178. als Fälle ansprechen, welche direkt unserem Exhaustionsprinzipe unterzuordnen sind; andererseits wird kein Leser der Poincaréschen Schriften im Zweifel sein, daß das genannte Prinzip als solches noch nicht in diesen enthalten ist. Ferner gelten ähnliche Bemerkungen für I. 155. 156., worin man starke Anklänge an unsere „Elementarvorgänge" finden wird, wenn auch Poincaré noch nicht unsere systematische Definition derselben hat. Das Verfahren der Integration ist behandelt in I. 160[1]; und so noch viele andere Stellen.

Fassen wir zusammen, so können wir sagen: Der größte Fortschritt, den Poincaré neben vielen Detail-Resultaten erzielte, ist die Erkenntnis, daß es Sätze gibt unter den ersten Sätzen unserer Wissenschaften, welche als konventionelle Festsetzungen (im obigen Sinne) angesprochen werden können, und daß dieser Art von Sätzen eine außerordentlich große Bedeutung zukommt. Doch ist es Poincaré nicht gelungen eine scharfe Abgrenzung dieser Sätze von solchen anderer Art, sowie eine ausreichende Antwort darauf zu geben, welches das Verhältnis zur Wirklichkeit bei diesen Sätzen ist, d. h. warum sich die Wirklichkeit nach ihnen richten muß. —

Neuerdings hat der Philosoph Theodor Lipps sich in einem Vortrage[2] im Jahre 1906 zusammenfassend über seine Anschauungen bezüglich der behandelten Probleme geäußert; in einem Teile dieser Schrift (p. 7—11 ungefähr) beschäftigt er sich direkt mit diesen (der übrige Teil ist mehr allgemeiner philosophischen Fragen gewidmet). Herr Lipps spricht eine Reihe von Anschauungen aus (allerdings hier meist ohne nähere Begründung), welche, wie aus den vorstehenden Untersuchungen hervorgeht, den wirklichen Verhältnissen weitgehend entsprechen. Hierfür seien kurz einige Beispiele an-

[1] Im übrigen ist z. B. der ganze Absatz in I. 99—112 und vorher eine ausgezeichnete Illustration zu den in diesem Kapitel aufgestellten Prinzipien.

[2] „Naturwissenschaft und Weltanschauung", Heidelberg 1906, p. 40.

geführt: Das Fallgesetz . . . sagt . . . „wie die Körper fallen würden, wenn die Bedingungen des Fallens rein gegeben wären. Es charakterisiert das reine oder ideale Fallen, das nirgendwo anders als im Geiste des Naturforschers vorkommt" (p. 8). Solche „ideale Tatsachen" sind nicht durch Induktion aus der Erfahrung gewonnen, „sondern sie sind vom denkenden Geiste der Wirklichkeit gegeben" (p. 8). Das naturwissenschaftliche Erklären „ist das denkende Auflösen eines erfahrbaren Wirklichen in solche vom Geiste aus dem Material der Erfahrung geschaffene konstante ideale Komponenten". (p. 9.) Lipps schließt diesen Absatz u. a. mit folgender Bemerkung: „Wie es zugeht, daß die Naturgesetze, die der Geist nach seinem Gesetz aus dem Material der Erfahrung schafft, durch neue Erfahrungen bestätigt werden, oder wie es geschieht, daß jene „Rechnung" obgleich sie nicht von den Tatsachen, sondern vom denkenden Geiste angestellt wird, in ihrem Ergebnis immer wieder mit den Tatsachen zusammentrifft, dies freilich ist ein Rätsel. Ja es ist das große Rätsel". (p. 10.)

Wir sehen in Herrn Lipps einen Vertreter der ersten jener beiden Gruppen, in welche sich vor E. Mach die Forscher auf unserem Gebiete trennen ließen, der Idealisten. Und gerade die letzte Bemerkung zeigt die Konsequenzen dieser Theorie aufs deutlichste.

Wir schließen diesen Paragraphen, indem wir einige Bemerkungen anführen, die Herr H. v. Seeliger kürzlich in „Über die Anwendung der Naturgesetze auf das Universum"[1] gemacht hat:

„Man hört oft sagen, daß alle Naturgesetze, weil aus dem engen Rahmen gemachter Erfahrung stammend, nur eine näherungsweise Richtigkeit beanspruchen können, wodurch ihre unbegrenzte Anwendbarkeit an sich ausgeschlossen erscheint. Mit der Konstatierung dieser überaus trivialen Wahrheit wäre aber wenig geholfen. Denn es handelt sich hier um

[1] Sitzungsberichte der K. b. Ak. d. Wiss., math.-phys. Klasse. Jahrg. 1909. 4. Abh. p. 4 und 5.

etwas anderes, nämlich um sehr weit getriebene Abstraktionen, die unter bestimmten Bedingungen die Möglichkeit einer unbegrenzten Gültigkeit enthalten können, wenn ihre Fassung in genügend scharfer Weise erfolgt ist. Die Aufsuchung dieser Bedingungen ist nicht nur eine durchaus berechtigte, sondern auch eine sehr nötige Aufgabe." „Ob aber das Newtonsche Gesetz wirklich ein solches Gesetz von universeller Gültigkeit ist oder sein kann, ist jedenfalls dringend der Überlegung wert." „Nicht einzusehen ist, warum Untersuchungen in der genannten Richtung nicht erfolgreich geführt werden könnten."

Nachträglich müssen wir noch eines Autors gedenken, der erst in allerletzter Zeit seine schon früher verstreut ausgesprochenen, auf unser Gebiet bezüglichen Äußerungen im Zusammenhange dargestellt hat, wir meinen P. Volkmann[1]. Den hauptsächlichsten Fortschritt, den uns Volkmann gegenüber den bisherigen Autoren in seiner allgemeinen Anschauung zu bringen scheint, bezeichnen wir vielleicht durch folgende Stelle (p. 37): „Das Ziel der Naturwissenschaften ist es, diese objektiven und subjektiven Momente zur Deckung zu bringen. Insofern diese Deckung gelingt, verlieren unsere naturwissenschaftlichen Ideen ihren subjektiven Gehalt, hören auf bloße Ideen zu sein, und werden Realitäten." Wir sagten, daß V. diesen Fortschritt in seiner allgemeinen Anschauung bringe, da er das in diesem Satze niedergelegte Programm im folgenden nicht völlig durchzuführen vermag. Wir sehen in diesem Satze einen Fortschritt, da in ihm zuerst das „subjektive" und „objektive" Moment als gleichberechtigt behandelt werden, während wir bei den früheren Autoren noch stets ein Überwiegen von einem von beiden vorfanden. Die Durchführung des Programms kann V. deshalb nicht gelingen, weil ihm die Unterscheidung zwischen a priorischen und empirischen Sätzen fehlt (siehe oben § 12) und damit die Unterscheidung zwischen den Teilen der Wissenschaft, welche

[1] „Erkenntnistheoret. Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehung zum Geistesleben der Gegenwart". Leipzig u. Berlin 1910.

schon dem Urbau angehören, und deren Sätze unumstößlich geworden sind, und den Teilen, bei denen das noch nicht, oder nur teilweise der Fall ist (in der Physik z. B. gerade die Teile, an denen momentan gearbeitet wird). Ferner kann V. auch die subjektiven und objektiven Momente, deren „zur Deckung bringen" die Naturwissenschaft erstreben soll, noch nicht völlig ihrer Herkunft nach aufzeigen, wenn er auch hierin ebenfalls sehr bedeutsame Fortschritte gegenüber seinen Vorgängern erreicht. So scheint Herr V., worauf wir schon hinweisen konnten, der erste zu sein, welcher die zwei wichtigen Operationen, welche er durch die Prinzipien der Isolation und Superposition charakterisiert, für weite Gebiete in ihrer Bedeutung und Wirkungsweise erkannt hat[1].

[1] l. c. p. 155—158. Wir haben für die analogen Prinzipien in unserer allgemeinen Theorie, die unabhängig von Volkmann wiedergefunden wurden, auch unabhängig fast die gleichen Namen gewählt. (S. Kap. II, § 11.)

# III. Kapitel: Anwendung auf die Geometrie.

## I. Abschnitt: Die Geometrie des wirklichen Raumes.

### § 1. Der Raum und die Euklidische Geometrie.

1. Die im vorigen Kapitel erhaltenen Resultate sollen uns nun dazu dienen, wozu die ganze Untersuchung unternommen wurde, zur Anwendung auf die Geometrie. Schon im 1. Kapitel konnten wir zeigen, daß die Geometrie keine reinlogische Wissenschaft ist, sondern daß sie im vollen Sinne des Wortes eine Naturwissenschaft ist, nur eine solche, welche sich in einem Zustande ganz besonderer Vollendung befindet. Sie muß also nach den gleichen Prinzipien behandelbar sein, die wir im vorigen Kapitel für die wissenschaftliche und mathematische Behandlung der Wirklichkeit aufstellen konnten.

2. Die Geometrie beschäftigt sich mit der räumlichen Gestalt der Dinge der Wirklichkeit. Betrachten wir die Veränderungen der Gestalt eines solchen Dinges, so ist der Elementarvorgang dieses Vorgangs gemäß dem Machschen Ökonomieprinzip derjenige, wenn das Ding seine Gestalt nicht ändert, oder anders ausgedrückt, wenn die Gestalt des Dinges die gleiche bleibt. Ein Ding der Wirklichkeit, dessen Gestalt die gleiche bleibt, nennen wir, solange dies der Fall ist, einen starren Körper. Genau wie bei früheren Beispielen (Kap. II, § 8) bedarf es, um diesen Elementarvorgang des starren Körpers einzuführen zweierlei: 1. ein Gesetz, welches logisch von ihm ausgesagt wird, und welches ihm logisch definiert, 2. ein manuelles Verfahren, um festzustellen, ob dieses Gesetz erfüllt ist. Nun könnte man meinen, dies Gesetz sei einfach das, daß der starre Körper stets sich selbst gleich sei. Aber

schon unsere Überlegungen im 1. Kapitel konnten uns zeigen, daß dies nicht genügt. Denn dieses Gesetz würde ungefähr den sog. Kongruenzaxiomen entsprechen, aber wir sahen dort, daß diese noch nicht hinreichen, um eine Vollgeometrie zu haben, d. h. auch noch nicht um den starren Körper zu bestimmen und festzulegen. Wir wollen dieses noch aufzustellende, den starren Körper definierende Gesetz, das wir hier noch nicht ausführlicher behandeln wollen (dies wird erst im nächsten Abschnitte geschehen) folgendermaßen aussprechen: Der starre Körper soll ein Euklidischer sein, er soll den Gesetzen der Euklidischen Geometrie gehorchen, wobei natürlich dieses Gesetz so beschaffen sein soll, daß es dem Machschen Ökonomieprinzip gehorcht, das einfachste ist.

3. Nun haben wir schon im 1. Kapitel eine Methode angegeben um den starren Körper manuell herzustellen. Wir zeigten dort, wie es gelinge jede wahrnehmbare Veränderung des starren Körpers auszuschalten. Es fragt sich aber, welches dann die exakte Definition für solche wegzuschaffende Veränderungen, für solche störende Umstände sei. Diese nun erhalten wir in dem eben aufgestellten Gesetze. Nunmehr haben wir alle nötigen Ingredienzien, um den exakten starren Körper, wie ihn das Machsche Ökonomieprinzip verlangt, herzustellen. Wir nehmen einen beliebigen Körper als starr an, und versuchen, ob, und inwieweit er das aufgestellte Gesetz, daß er ein Euklidischer sei, erfüllt. Erfüllt er dieses Gesetz, dann ist er eine Realisierung des starren Körpers, erfüllt er es nicht, dann erkenne ich auf diesem Wege die Größe seiner Abweichung und kann sie auf dem im 1. Kapitel angegebenen Wege entfernen innerhalb der momentanen Genauigkeitsgrenzen. Mit dem so erhaltenen starren Körper gehe ich dann wieder den dort beschriebenen Weg, ich werde genauer feststellen können, inwieweit er seinem Gesetz gehorcht, das erlaubt mir wieder die ändernden Erscheinungen genauer konstant zu halten, und dies liefert mir wieder einen genaueren starren Körper. Auf diese Weise

können wir sagen, daß die Euklidische Geometrie innerhalb der momentanen Genauigkeitsgrenze in unserem Raume gilt.

Wir werden die manuelle Behandlung dieser geometrischen Fragen noch ausführlich in den folgenden Paragraphen besprechen.

4. Nun gibt es aber in der Geometrie außer dem starren Körper noch andere Elementarvorgänge. Man bemerkt nämlich an einem starren Körper Flächen, Linien und Punkte. Man kann sich diese Dinge auf verschiedene Weise aus dem starren Körper und auseinander abgeleitet denken, wir können uns hierauf nicht einlassen, und begnügen uns mit deren Vorhandensein. Nun können wir aber auch für diese Dinge Elementarvorgänge herstellen[1], d. h. man kann nach dem Machschen Ökonomieprinzipe eine einfachste Fläche, Linie, Punkt aufstellen. Man hat diese Elementarvorgänge resp. als Ebene, Gerade, Punkt bezeichnet.

Nun ist aber die historische Entwickelung der Geometrie nicht von dem starren Körper ausgegangen — welcher einen Zweifel an der „Euklidität des Raumes" nicht so leicht wohl hätte aufkommen lassen — sondern, da sie sich aus der Praxis heraus entwickelte, von den anderen drei genannten Elementarvorgängen. Nun besteht aber das merkwürdige Verhältnis, daß die genannten drei Elementarvorgänge der Ebene, Geraden, Punkt nicht hinreichen, um umgekehrt aus ihnen den oder einen starren Körper synthetisch herzustellen. Nun hatte man aber beim logischen Aufbau sich wesentlich auf die drei Elementarvorgänge beschränkt, während man beim manuellen Aufbau (den Konstruktionen) stets ohne weiteres den starren Körper (Zirkel) benutzte. So konnte auf Grund der genannten logischen Grundlagen keine volle Bestimmtheit für den starren Körper erlangt werden. Diejenige logische Bestimmung, welche zu den genannten logischen Grundlagen

[1] Es klingt vielleicht etwas merkwürdig, wenn wir auch hier von Elementarvorgängen sprechen, aber wir haben den Begriff „Vorgang" so definiert, daß wir auch ein „Ding" als einen Vorgang bezeichnen dürfen, bei dem sich eben dann nichts ändert.

noch hinzukommen mußte, um den starren Körper zu bestimmen, die Geometrie eindeutig zu machen (das Parallelenaxiom), mußte also als etwas willkürlich von außen Hineingetragenes erscheinen[1]. Da man nun aber nicht umhin konnte, die außerordentliche Genauigkeit, und bis auf kleinste Fehler vorhandene Eindeutigkeit des manuellen Aufbaues zu bemerken, so ergab sich von selbst der Gedanke, daß man eben aus diesem manuellen Aufbau feststellen müsse (Experiment, Messung), welcher Art die an der logischen Vollständigkeit noch fehlende Bestimmung sein müsse.

Wir haben diese Bemerkungen, welche wir großenteils schon im ersten Kapitel machten, nochmals hierhergesetzt, um dabei die in Kapitel II herausgearbeitete Terminologie einzuführen. Wir wollen nun in den weiteren Paragraphen dieses Abschnittes noch die Geometrie in der durch Euklid geläufigen Form in ihren Erscheinungen auf Grund der in Kapitel II erhaltenen Resultate untersuchen.

5. Hier aber wollen wir noch kurz feststellen, was sich auf Grund der in Kapitel II erhaltenen Resultate bezüglich der Euklidität des Raumes wirklich aussagen läßt. Die einzelnen dabei auftretenden Aussagen werden im folgenden noch detaillierter behandelt werden.

Für die auf Grund des Machschen Ökonomieprinzips aufgestellten Elementarvorgänge der Geometrie (starrer Körper, Ebene, Gerade, Punkt) werden auf Grund des gleichen Prinzips ihre Gesetze aufgestellt. Diese letzteren sind aber selbst in ihrer Gesamtheit gleich oder gleichwertig der Gesamtheit der Axiome der Euklidischen Geometrie, da die gleichen logischen Folgen und keine anderen sich aus ihnen ergeben müssen. Die Gesamtheit dieser logischen Folgen liefert den logischen Aufbau der Geometrie, den entsprechenden

[1] Der logischen Einführung des Parax in die Geometrie entspricht eben nicht die Einführung eines neuen, vollständigen Elementarvorganges in der Wirklichkeit, sondern nur die einer neuen Eigenschaft an einer aus den bereits vorhandenen Elementarvorgängen gebildeten Figur.

manuellen Aufbau erhalten wir auf folgende Weise: In der oben ausgeführten Weise (Kap. I. § 6) wird der starre Körper realisiert, und zwar gemäß dem Prinzipe der Genauigkeitsschichten. Gemäß dem gleichen Prinzipe können dann die übrigen Elementarvorgänge in der genannten Weise (Kap. I, § 5) realisiert werden. (Dies könnte, wie wir sehen werden, auch auf andere aber unpraktische Weise mittels des starren Körpers geschehen.)

Ob dann die Realisierung eine richtige (i. e. genaue) ist, erkennen wir daraus, daß die Elementarvorgänge ihren gemäß dem Machschen Ökonomieprinzipe aufgestellten Gesetzen, sowie deren logischen Folgen gehorchen (was durch manuelle Prüfung, Experiment, festgestellt wird). Tun sie das nicht, so sind störende Umstände daran schuld. Wir haben im vorigen Kapitel gezeigt, daß eine allmähliche, immer fortschreitende Ausschaltung dieser störenden Umstände erfolgt, und daß so die Elementarvorgänge ihren Gesetzen und deren logischen Folgen immer genauer bei ihrer manuellen Realisierung folgen. Wir haben bewiesen, daß es einen unaufhaltsamen Fortschritt in dieser Richtung gibt, und daß niemals eine Differenz zwischen der manuellen Realisierung der Elementarvorgänge und den zugehörigen a priorischen Gesetzen vorhanden sein kann, welche nicht verringert werden könnte. So können wir denn als eines der Hauptresultate unserer Untersuchung nunmehr aussprechen:

„Die manuelle Geometrie des Raumes nähert sich unaufhaltsam immer mehr der absoluten Übereinstimmung mit den Gesetzen der sog. Euklidischen Geometrie, ohne sie — einerseits — je völlig zu erreichen, ohne aber — andererseits — jemals eine Differenz mit dieser aufzuweisen, welche nicht verringert werden könnte[1]."

[1] Daß die Euklidische Geometrie gemäß des Machschen Ökonomieprinzips als die einfachste zu gelten habe, hat zunächst Ernst Mach selbst verschiedentlich ausgesprochen. Eine entsprechende Bemerkung F. Kleins haben wir bereits (Kap. II, § 14) angeführt.

## § 2. Das geometrische Experiment.

1. Wir haben in Nr. 4 des vorigen Paragraphen nochmals kurz darauf hingewiesen, wie es kam, daß man die verlangte Entscheidung zwischen den verschiedenen Geometrien der „Erfahrung", d. h. dem Experimente, dem Messen zuschob. Wir werden im folgenden Paragraphen auf Grund der Resultate des Kapitel II nochmals ausdrücklich und speziell für die Geometrie den Nachweis führen, daß ein derartiger Versuch sowohl aussichtslos, als in sich sinnlos ist, und daß wir immer wieder auf diejenige Geometrie zurückgeführt werden, welche das Machsche Ökonomieprinzip als die einfachste liefert, die Euklidische. Zu diesem Zwecke aber wollen wir uns in diesem Paragraphen das geometrische Experiment zunächst einmal als solches näher betrachten.

2. Unter einem geometrischen Experimente verstehen wir also eine manuelle sog. „Konstruktion", welche erlaubt zu prüfen, ob in dem betreffenden Falle ein geometrisches Elementargesetz (Axiom) oder eine logische Folge dieser erfüllt ist oder nicht, oder inwieweit dieselbe erfüllt ist.

3. Wir haben früher (Kap. II) dargelegt, daß kompliziertere Vorgänge eines Gebietes synthetisch dargestellt werden aus den Elementarvorgängen; andererseits, daß ein gegebener komplizierter Vorgang erklärt wird, indem wir ihn in seine Elementarvorgänge zerlegen. Die analogen Umstände wollen wir nun bei der Geometrie verfolgen.

Zunächst werden die Elementarvorgänge der Geometrie möglichst genau realisiert. Da die hauptsächlichste Gelegenheit, geometrische Experimente zu machen, das geometrische Zeichnen[1] ist, so werden wir unsere Betrachtung hauptsächlich diesem zuwenden.

---

In neuerer Zeit hat A. Voss diese Frage ausführlicher und kritisch behandelt in seiner bekannten Schrift „Über das Wesen der Mathematik", Leipzig und Berlin 1908 (insbesondere p. 81).

[1] Geometrische Experimente werden sonst hauptsächlich bei Bauten und Maschinen gemacht (d. h. eben überall wo räumliche Konstruktion aus starren Körpern stattfindet), jedoch werden diese

Die Realisierungen der Elementarvorgänge sind also beim Zeichnen die folgenden: Als Gerade dienen Lineal und Reißschiene, als Ebene das Reißbrett mit aufgezogenem Papier, als Punkt die Zirkel- oder Bleistiftspitze und als starrer Körper der Zirkel.

Nun handelt es sich um die Frage: Sind die Realisierungen, die wir momentan vor uns haben, in der Tat genaue Realisierungen? Ganz, wie es die allgemeine Theorie des Kapitel II vorschreibt, erhalten wir die Antwort hierauf, indem wir nachsehen, ob und inwieweit die a priorischen Gesetze der Geometrie erfüllt sind, wenn ich sie mit Hilfe der vorgelegten Realisierungen prüfe. Hier kommen zunächst jene einfachen Handgriffe in Betracht, welche dazu dienen, die Genauigkeit der Instrumente (so wollen wir die vorgelegten Realisierungen nennen) zu prüfen[1]. Weitere Prüfung liefern dann die mit diesen Instrumenten ausgeführten Konstruktionen.

4. Die logische Behandlung geometrischer Figuren geht dann so vor sich: An einer verwickelteren, zusammengesetzten Figur kann man verschiedene einfache Figuren unterscheiden. Ich kann, wenn etwa die Figur aus 10 Geraden besteht, aus diesen eine herausgreifen, oder zwei, oder drei usw., und diese für sich betrachten. Das ist die Operation, welche wir als Analyse bezeichneten, als Zerlegung des vorgegebenen Vorganges in Elementarvorgänge oder zum mindesten einfachere Vorgänge. Nun kenne ich aber die a priorischen Gesetze der Elementarvorgänge, ihre Elementargesetze (hier etwa die Axiome). Wende ich diese nun auf die einzelnen Elementarvorgänge der vorgelegten Figur an, so kann ich

meist schon durch Zeichnen vorbereitet, so daß die Beschränkung unserer Betrachtung auf das geometrische Zeichnen nicht allzu groß ist. Im übrigen läßt sich das oben zu Sagende ohne weiteres auf andere Fälle geometrischer Experimente ausdehnen.

[1] Diese, meist durch mündliche Tradition fortgepflanzt, im übrigen auch stets leicht neu aufzufinden, finden sich z. B. dargelegt in A. zur Megede „Wie fertigt man technische Zeichnungen“. 2. Aufl. Berlin 1888 (bes. Abschn. I: „Die Zeichenmaterialien“).

über diese Elementarvorgänge Sätze aussagen; durch Zusammenfassen zweier Elementarvorgänge (oder „Elementarfiguren“, wie wir in unserem Falle sagen könnten) erhalte ich eine nächstverwickeltere Figur; das logisch Entsprechende dieser Operation ist das Zusammenfassen der Gesetze der beiden, und Ableitung der Gesetze der zusammengesetzten Figur. In gleicher Weise schreite ich weiter zur nächst verwickelten Figur usw. Bei diesen Figuren höherer Stufe brauche ich dann bei Ableitung ihrer Gesetze nicht mehr stets bis zu den Elementargesetzen zurückzugehen, sondern ich kann aus einer solchen eine Figur irgendeiner niederen Stufe herausheben, und die für diese schon früher abgeleiteten Gesetze unmittelbar verwenden[1].

Dies ist die Operation der manuellen und logischen Synthese. Und wir erkennen, daß sich hier genau jener Gang der Entwickelung für die Geometrie ergibt, wie ihn Euklid zuerst für ihren Aufbau verwendet hat, und wie er seitdem klassisch geworden ist.

5. Eine charakteristische Anwendung findet im Gebiete der Geometrie auch der Identitätssatz (Kap. II, § 5), mit dem ja auch für dieses Gebiet die manuelle Beherrschung erst begründet wird.

Um nämlich die Konstruktion einer Figur anzugeben, ihre manuelle Synthese zu ermöglichen, ist es nötig, diejenigen Elementarvorgänge anzugeben, aus denen sie sich zusammensetzt, sowie die Art dieser Zusammensetzung. Diese Angaben entsprechen dem, was wir in Kapitel II die Angabe der „wesentlichen Umstände“ des herzustellenden Vorganges genannt haben. Hier wollen wir diesen Bedingungen den

---

[1] Man hat dies auf nicht mathematischer Seite, wie es scheint, manchmal nicht recht erkannt. So beruhen die Vorwürfe Schopenhauers gegen die geometrischen Beweise auf einer völligen Verkennung dieses Tatbestandes. Sch. hielt es nämlich für nötig, überall „unmittelbar einzusehende“ Beweise zu haben. Siehe hierzu den Akademievortrag von A. Pringsheim „Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik“. (Jahrber. d. D. Math. Vergg. XIII (1904), p. 357f.)

Namen der „Bestimmungsstücke der Figur" geben. Und wenn wir nun den Identitätssatz anwenden, so ergibt sich unmittelbar: Eine Figur ist identisch mit der Gesamtheit ihrer Bestimmungsstücke[1].

Daraus ergibt sich der Satz: Zwei Figuren mit gleichen Bestimmungsstücken sind gleich in bezug auf diese Bestimmungsstücke und deren logische Folgen.

Sind also diese Bestimmungsstücke insbesondere so beschaffen, daß sie die Figur eindeutig bis auf ihre Lage im Raume bestimmen, dann sind die beiden Figuren gleich bis eben auf ihre Lage im Raume, und das nennt man „Kongruent".

6. Nun kann man aber bei der Analyse einer gegebenen Figur ganz beliebige ihrer Stücke oder Elementarfiguren als eine „Unterfigur" zusammenfassen, und von dieser ihre Sätze aussagen. Das wird dann lauter Sätze über die Figur geben, welche bei einer manuellen Prüfung sämtlich als richtig befunden werden müssen, falls die Figur selbst richtig gezeichnet ist, d. h. zu ihrer Herstellung genaue Realisierungen der Elementarvorgänge, und diese wirklich in der durch die Definition der Figur vorgeschriebenen Weise verwendet wurden. Da nun, falls alle Bestimmungsstücke gezeichnet sind, die Figur selbst hergestellt ist, so wird es nicht möglich sein schon bei der Herstellung darauf zu achten, ob auch alle die genannten Sätze erfüllt sind, und wir werden so an der fertigen Figur einige dieser Sätze prüfen können. Da diese Sätze logische Folgen der Gesetze der Elementarvorgänge unserer Figur sind, so wird die Probe zeigen, ob und wie genau die Elementarvorgänge realisiert waren, so-

[1] Man wird hier einwerfen, daß z. B. zwei Seiten und ein eingeschlossener Winkel noch kein Dreieck ergeben. Allerdings nicht, doch sind dies auch noch nicht alle Bestimmungsstücke eines Dreiecks. Vielmehr muß noch die Bestimmung hinzukommen, daß die freien Enden der beiden Seiten noch durch eine gerade Strecke verbunden werden sollen, eine Bestimmung, die bei der gewöhnlichen Ausdrucksweise in dem Worte „Dreieck" versteckt liegt. Und ganz analog in anderen Fällen.

wie die Vorschriften erfüllt waren, die wir zur Herstellung der Figur benutzten. Diese Sätze werden uns also Kontrolle geben für die „Richtigkeit unserer Zeichnung". Es sind das die in der zeichnenden Geometrie immer wieder auftretenden sog. Kontrollen.

### § 3. Das geometrische Experiment als Entscheidungsmittel zwischen den verschiedenen Geometrien.

1. Nachdem wir im vorigen Paragraphen die allgemeinen Verhältnisse beim geometrischen Experimente betrachtet haben, wollen wir uns jetzt mit der „Genauigkeit" dieser Experimente näher beschäftigen, um die am Anfange des vorigen Paragraphen gestellte Aufgabe ihrer Lösung zuzuführen.

Wir haben schon öfter davon gehandelt, daß vielfach und zumeist dem geometrischen Experimente die Aufgabe zugeschrieben wurde, zwischen den verschiedenen Geometrien eine Entscheidung zu treffen. Obwohl wir uns nun im vorhergehenden auf Grund unserer Untersuchung für eine bestimmte Geometrie entscheiden mußten, so wollen wir doch die ausgearbeitete Methode benutzen, um ausdrücklich die genannte Verwendung des geometrischen Experimentes nochmals speziell als unmöglich nachzuweisen, wenn dies auch für unseren Gedankengang im ganzen nicht notwendig ist.

2. Nehmen wir nämlich an, „die Geometrie des Raumes sei nicht die Euklidische" (wir drücken uns so aus, wie das üblich ist), so würde das eben darin zum Ausdruck kommen, daß die logischen Konsequenzen der Euklidischen Elementargesetze sowie diese (oder einige von diesen) selbst nicht in der Wirklichkeit zutreffen. Nun stimmt die Wirklichkeit in der Tat bis auf geringes mit den Euklidischen Gesetzen überein (wir wissen jetzt auf Grund des vorstehenden, daß diese Übereinstimmung eine Folge unserer Realisierungsbestrebungen ist und nie eine vollständige sein wird, aber sich immer mehr verbessert). Ohne Kenntnis der von uns abgeleiteten Tatsachen könnte man aber immer noch an-

nehmen, daß einmal bei einem noch höheren Grade der Beobachtungsgenauigkeit sich eine deutliche Abweichung von den Euklidischen Gesetzen zeigen könnte. Wir wollen die Konsequenzen dieser Annahme verfolgen.

Nehmen wir also diesen Fall an, so bedeutet das folgendes: Sei für den zukünftigen Moment, in dem die angenommene Abweichung sich herausstellt, $\varepsilon$ die durchschnittliche Größe des momentanen Messungsfehlers bei geometrischen Experimenten, die also bei aller Sorgfalt mit den dann momentan vorhandenen Hilfsmitteln nicht verringert werden kann. Sei ferner $a$ die konstatierte Abweichung von den Euklidischen Gesetzen. Dann bedeutet das Vorhandensein dieser Abweichung, daß $a$ größer ist als $\varepsilon$. Dann heißt das also, daß bei aller Sorgfalt des Zeichnens und Messens die Abweichung nicht kleiner als $a$ gemacht werden kann, während ich weiß, daß mein eigentlicher Arbeitsfehler nur die Größe $\varepsilon$ ($<a$) erreicht.

Es ist nun die Frage, ist dieser Fall überhaupt möglich. Woraus kann ich wissen, daß mein Arbeitsfehler von der Größe $\varepsilon$ ist?

Falls ich eine Voraussetzung über die Art der Geometrie nicht a priorisch mache (aus welcher andernfalls der Fehler entnommen wird) — und das haben wir ja ausgeschlossen, da wir diese Art erst durch die Messung zu finden suchen wollen — so bleibt mir nur das in Kapitel II, § 12 erwähnte Mittel übrig: aus der Konstanz meiner wiederholten Experimente auf die Größe des Arbeitsfehlers zu schließen. Finde ich nun in der Tat, daß bei Variation der unwesentlichen Umstände ich die wesentlichen so konstant halten kann, daß sich gegenüber dem Mittel aus einer Reihe gleicher Experimente wirklich ein Arbeitsfehler von der Größe $\varepsilon$ nur ergibt, während der Fehler gegenüber den Euklidischen Gesetzen gleich $a$ ist, dann habe ich den genannten Fall realisiert.

Können wir nun hieraus bereits auf eine andere Geometrie schließen? Wir können lediglich schließen, daß es mir gelungen ist, die wesentlichen Umstände meines Experimentes (d. h. Zeicheninstrumente, Sorgfalt usw.) soweit konstant zu halten, daß die Schwankung des Resultates nur den Fehler $\varepsilon$ ergibt. Müssen wir uns damit nun zufrieden geben? Nein, wir haben noch eine Möglichkeit. Die Abweichung $a$ kann durch die äußerste Sorgfalt, die ich anwende, nicht vermindert werden, alle die kleinen Schwankungen, die sog. unwesentliche Umstände hervorbringen, sind kleiner als $a$. Aber vielleicht ist $a$ auf einem andern Wege zu beseitigen. Ich kann nämlich fragen, ob ich nicht die *wesentlichen* Umstände meiner Experimente so variieren kann, daß die Abweichung $a$ verschwindet.

Und hier ist noch folgendes zu beachten. Die Abweichung meines geometrischen Experimentes von den Euklidischen Gesetzen war $a$. Wären nun alle die Unterfiguren und Elementarfiguren, welche ich aus meiner Konstruktionsfigur herausgreifen kann, so beschaffen, daß sie den Euklidischen Gesetzen innerhalb der momentanen Konstruktionsgenauigkeit entsprächen, dann könnte auch die Abweichung der Gesamtfigur von den Euklidischen Gesetzen nicht größer sein, als der momentane Konstruktions-(Arbeits-)fehler der Gesamtfigur[1], nach dem Identitätssatze. Wir können also auch umgekehrt schließen: Ist die Abweichung des Experimentes von den Euklidischen Gesetzen (stets bei vorausgesetzter sorgfältigster Arbeit) größer als $\varepsilon$, als der Arbeitsfehler des Experimentes, so müssen auch einige Unterfiguren, und, da man auf diese den gleichen Schluß anwenden kann, schließlich auch einige Elementarfiguren Abwei-

[1] Dieser Arbeitsfehler, der sich beim Resultate der Gesamtfigur bemerkbar macht, könnte auch aus den betr. Arbeitsfehlern der Elementarfiguren berechnet werden. Untersuchungen in dieser Richtung siehe z. B. Konrad Nitz „Anwendungen der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal". Diss. Königsberg 1905.

chungen von den Euklidischen Gesetzen aufweisen, welche größer sind als der betr. notwendige Arbeits- oder Konstruktionsfehler der Elementarfigur.

Wir können sagen: Finden wir also bei einer mit allen Kautelen ausgeführten Konstrukion eine Abweichung von den Euklidischen Gesetzen, welche größer ist als der momentane Arbeitsfehler, dann folgt daraus, daß einige der benutzten Elementarfiguren (Ebene, Geraden, starrer Körper) Abweichungen von ihren Euklidischen Gesetzen aufwiesen, welche größer sind als ihre notwendigen momentanen Konstruktionsfehler.

Wenn wir also oben fanden, daß zur Beseitigung der Abweichung *a* die wesentlichen Umstände variiert werden müssen, so wissen wir jetzt, welches die wesentlichen Umstände sind: die Elementarfiguren.

Sind aber meine Elementarfiguren „falsch", d. h. zeigen sie Abweichungen von den Euklidischen Gesetzen, dann folgt, daß meine Instrumente „falsch" waren, mit denen ich meine Elementarfiguren herstellte. Und die Behauptung, daß eine von der Euklidischen abweichende Geometrie vorhanden sei, läuft hinaus auf die Behauptung, daß es an unseren Instrumenten unkorrigierbare Abweichungen gebe von den „Euklidischen Instrumenten".

Da aber alle geometrischen Instrumente aus dem starren Körper abgeleitet werden können, so heißt dies, daß unser starrer Körper unkorrigierbare Abweichungen vom Euklidischen starren Körper zeige. Da aber die Euklidität des Euklidischen starren Körpers darauf beruht, daß er sich selbst stets gleich bleibt, so heißt die obige Behauptung wiederum, daß unser starrer Körper sich nicht stets gleich bleibe, d. h. nicht seinem a priorischen Gesetze gehorche.

Wir können sagen: Die Behauptung, daß in unserem Raume eine andere als die Euklidische Geometrie gelte, bedeutet, daß unser starrer Körper unkorrigierbare Abweichungen vom Euklidischen zeige. Wodurch ist aber dann unser starrer Körper definiert?

Das Mittel also, eine solche hypothetische Abweichung der Geometrie von der Euklidischen zu entfernen, wäre das, eine entsprechende Korrektur am starren Körper anzubringen. Nun aber erinnern wir uns, was wir betreffs der manuellen Herstellung, der Realisierung des starren Körpers und der dabei erreichten Genauigkeit fanden (§ 1 dieses Kapitels).

Wir fanden, daß es uns gelingt, mittels des Prinzips der Genauigkeitsschichten Körper herzustellen, welche immer genauer sich gleich bleiben, immer bessere starre Körper sind. Sobald wir feststellen können, daß der Körper nicht den Euklidischen Gesetzen gehorcht, wird dadurch ein störender Umstand des starren Körpers definiert, und diese Veränderung dann entweder manuell oder durch Anbringen rechnerischer Korrekturen ausgeschaltet[1]. D. h. aber mit der gleichen Genauigkeit, mit der wir überhaupt irgendeine Veränderung an einem Körper konstatieren können, wird dadurch gleichzeitig und automatisch auch der starre Körper realisiert. Das heißt aber, daß es uns jederzeit gelingt, einen Körper herzustellen, welcher innerhalb der momentanen Genauigkeitsgrenzen sich selbst gleich bleibt, ein starrer Körper ist.

Und daraus folgt dann, daß ein derartiger Fall, wo eine Abweichung von den Euklidischen Gesetzen bei einer unter Einhaltung aller Kautelen unternommenen geometrischen Konstruktion gefunden wird, welche größer ist als der momentane Arbeitsfehler, stets auf eine hebbare Abweichung der benutzten Apparate von den Euklidischen zurückgeführt, und durch geeignete Abänderung der Apparate aus der Welt geschafft wer-

[1]) Diese Ausschaltung ist aber (wenigstens nach und nach) stets möglich (ebenso, wie wir sahen, daß überhaupt die Ausschaltung störender Umstände möglich ist) da der starre Körper gar keiner anderen Bedingung unterworfen ist.

den kann, wobei die Abweichung innerhalb der momentanen Genauigkeitsgrenzen hineingedrückt wird.

3. Es zeigt sich also, daß unsere Methode erlaubt, den Nachweis zu erbringen, daß es unmöglich ist, mit experimentellen Mitteln jemals auf eine Abweichung von der Euklidischen Geometrie zu stoßen, und dies für alle Zeiten. Gleichzeitig weist sie diese Geometrie als aufstellbar nach, als diejenige ,welche gemäß dem Machschen Ökonomieprinzip aufgestellt werden muß und auch aufgestellt werden kann.

Mit einer kleinen Wendung des Standpunktes können wir das in Nr. 2 erhaltene Resultat auch so aussprechen: Experimente, welche die Natur des Raumes erforschen wollen, können nur zur Prüfung der Genauigkeit der hierzu verwendeten Apparate dienen.

Aus unseren Untersuchungen in Kapitel II ergibt sich, worauf wir auch hier nochmals kurz hinweisen wollen, daß wir genau den gleichen Satz ganz allgemein überall da aussprechen können, wo es sich um experimentelle Prüfung eines Satzes handelt, der auf Grund des Machschen Ökonomieprinzipes gewonnen, also in unserem Sinne ein a priorischer ist[1].

Die Untersuchungen dieses Abschnittes werden gezeigt haben, wie außerordentlich einfach mit Hilfe der Begriffsbildungen des Kapitel II sich Probleme angreifen lassen, welche bisher beinahe zu den unangreifbaren zählten.

[1] Es sind in letzter Zeit eine Reihe von derartigen Versuchen gemacht worden, wir erinnern nur an die experimentelle Prüfung des Satzes von der Erhaltung der Masse durch Landolt u. a. m. Wie sich aus dem Prinzip der Genauigkeitsgeschichten ergibt, wird es immer nötig sein, unsere Apparate einer immer wiederholten Prüfung durch das Experiment zu unterwerfen. Aber ist es nötig, diese Versuche unter einer anfechtbaren Interpretation vorzunehmen? Die richtige Interpretation ist, wie wir fanden, die: „Mit welcher Genauigkeit gelingt es uns, den Elementarvorgang zu realisieren“, aber nicht: „Wie genau gilt das und das a priorische Gesetz in der Wirklichkeit“.

# II. Abschnitt: Der Aufbau.

## § 4. Die Definition des starren Körpers.

1. Durch unsere Untersuchungen im 2. Kapitel hat sich ergeben, daß unsere Erforschung der Wirklichkeit in einer Weise vor sich geht, welche wir als Entwicklung in eine Reihe bezeichneten. Bei dieser Erforschung der Gesamtwirklichkeit ist nun, wie wir schon früher gesehen haben, das erste Glied oder eines der ersten Glieder dasjenige, welches sich mit denjenigen Eigenschaften der wirklichen Dinge beschäftigt, welche man als gestaltliche zu bezeichnen pflegt, kurz die Geometrie. Wir werden also, um dieses erste Glied der Entwicklung aufzustellen, diejenigen Eigenschaften und Veränderungen an den Dingen der Wirklichkeit zu charakterisieren haben, welche wir als zu diesem ersten Gliede gehörig, als „geometrische" betrachtet wissen wollen. Unsere allgemeine Theorie, die wir im 2. Kapitel entwickelt haben, sagt uns, daß die Instanz, welche uns vorschreibt, was wir alles zu diesem ersten Gliede hinzurechnen sollen, das Machsche Ökonomieprinzip ist. Dieses Prinzip muß uns also für die gesamte Wirklichkeit die Charakteristik für gewisse einfachste Eigenschaften und Veränderungen liefern, welche in der Geometrie zusammengefaßt werden.

2. Es würde sich also darum handeln, die Gesetze, welche diese geometrischen Veränderungen charakterisieren, gemäß dem Machschen Ökonomieprinzip als die einfachst möglichen in ihrer Art aufzustellen. Hierzu wollen wir uns der allgemeinen Vorschriften erinnern, die wir im vorigen Kapitel fanden für die Aufstellung der Elementarvorgänge und ihre Realisierung in der Wirklichkeit. Wenn wir also die Geometrie als ein erstes Glied in der Erklärung der Gesamtwirklichkeit aufstellen wollen, so kann, wie wir sahen, durch nichts uns die Aufgabe erspart werden, dieses erste Glied gegen die folgenden abzugrenzen. Dies geschieht aber durch Aufstellung des oder der a priorischen Gesetze dieses Glie-

des gemäß dem Machschen Ökonomieprinzipe, denn erst dieses Gesetz erlaubt uns dann (nebst den zugehörigen manuellen Untersuchungsmethoden) in der Wirklichkeit die Abgrenzung der geometrischen Veränderungen gegenüber den anderen durchzuführen, bei einer vorgelegten Veränderung zu entscheiden, ob sie ganz oder nur teilweise eine geometrische sei, und wieviel in letzterem Falle an ihr geometrisch, wie viel nicht geometrisch sei.

Man ist sich nun allgemein darüber einig, daß die einfachste Geometrie die sog. Euklidische ist; und deren Gesetze wollen wir denn auch als diejenigen annehmen, welche auf Grund des Machschen Ökonomieprinzips die geometrischen Vorgänge als solche charakterisieren sollen. Wäre die Theorie der „Einfachstheit" (welches eine mathematische Theorie wäre, auf welche zurückzukommen wir uns vorbehalten) weiter ausgebildet, so müßte es z. B. gelingen, aus dem Umstande, daß wir „Bewegungen" im dreidimensionalen Raume (wobei hier unter „Bewegungen" beliebige gestaltliche Veränderungen verstanden werden) zu behandeln haben, mit Hilfe des Machschen Ökonomiegesetzes die einfachsten solchen „Bewegungen" abzuleiten. Dies wollen wir zwar nicht hier versuchen, doch werden wir am Ende des nächsten Paragraphen auf diesen Punkt zurückkommen.

3. Haben wir also irgendein Ding der Wirklichkeit, das sich gestaltlich verändert, dann fragen wir: Ist diese Veränderung eine geometrische? Die Antwort erhalten wir, wenn wir nachsehen, ob sich das Ding gemäß den Gesetzen der Euklidischen Geometrie (der Euklidischen Bewegung) verändert. Ist dies der Fall, dann nennen wir dieses Ding einen starren Körper. Ist dies nicht der Fall, dann sind eben störende Umstände daran schuld, und wie groß diese Einwirkung der störenden Umstände ist, das ergibt sich aus der Größe der Abweichungen des Dinges von den Gesetzen der Euklidischen Geometrie.

Wir haben nun im 1. Kapitel gesehen, wie wir einen starren

Körper manuell in immer besserer Annäherung darstellen können. Wir zeigten dort, wie es nach und nach gelingt alle Umstände, welche gestaltlich verändernd auf den starren Körper einwirken immer genauer von diesem fernzuhalten. Es kam also darauf an, festzustellen, ob ein solcher Umstand vorhanden ist, ob tatsächlich solche Veränderungen am starren Körper vor sich gehen. Dies wurde festgestellt, indem wir das Verhalten des starren Körpers in verschiedener Weise rein manuell prüften. Gehen wir jedoch diesen Prüfungskriterien näher nach, dann finden wir stets, daß dieselben auf irgendwelche geometrische Gesetze hinauslaufen, deren Erfülltsein wir vom starren Körper verlangen. Und was dort unausgesprochen, und auch tatsächlich in der historischen Entwicklung oft unbewußt geschah, das wird nunmehr exakt ausgesprochen, wenn wir sagen: Ein Ding der Wirklichkeit heißt ein starrer Körper, wenn seine Veränderungen gemäß den Gesetzen der Euklidischen Geometrie vor sich gehen.

Damit ist nunmehr die exakte logische Definition des starren Körpers gemäß unseren Vorschriften von Kapitel II gegeben. Die manuelle Realisierung dieses Elementarvorgangs des starren Körpers geschieht dann genau nach den genannten Vorschriften, indem an einem vorgegebenen Dinge der Wirklichkeit manuell untersucht wird, ob und inwieweit es den Gesetzen der Euklidischen Geometrie gehorcht, und indem die dabei sich ergebenden störenden Umstände auf die im 1. Kapitel § 6 dargelegte Weise immer mehr entfernt werden. Dieser Vorgang unterliegt, wie schon des öfteren ausgeführt, dem Prinzipe der Genauigkeitsschichten.

4. Diese Gesetze der Euklidischen Geometrie, von denen wir in der vorigen Nummer sprachen, sind nun bisher rein logische. Um denselben nunmehr auch Eingang in die Wirklichkeit zu verschaffen, werden wir dieselben in irgendeiner Form in die Wirklichkeit einführen, mit dieser verknüpfen müssen. Und dies ist nun gerade bei der Geometrie eine verhältnismäßig verwickeltere Aufgabe (wenn wir

z. B. das im Kapitel II, § 8 behandelte Beispiel vergleichen). Es scheint für diese Einführung zwei Wege zu geben.

a) Der erste dieser Wege ist der, den die Griechen bei der Aufstellung der Geometrie gingen, und den wir in dem Euklidischen Aufbau (in den „Elementen") vor uns sehen.

b) Der andere Weg schließt sich an Ansätze von Riemann (Helmholtz, Lie) an, und wird im nächsten Paragraphen zu behandeln sein.

5. Suchen wir den Weg des Euklidischen Aufbaues der Geometrie zu gehen, so haben wir ja schon im 1. Kapitel § 7 gesehen, daß und warum diejenige Voraussetzung, welche diese Geometrie als Euklidische charakterisiert, eine etwas verwickeltere Form annehmen muß als die übrigen Axiome. Die logischen Gesetze, welche hier die Geometrie charakterisieren, sind also die Gesamtheit der Euklidischen Axiome (einschließlich des Parallelenaxioms) samt allen ihren logischen Konsequenzen. Die Einführung dieser logischen Gesetze in die Wirklichkeit wird also darin bestehen, daß wir mittels möglichst starrer Körper Ebenen und Geraden auf dem in Kapitel I, § 5 beschriebenen Wege herstellen, sowie Maßstäbe oder Zirkel, und nun festsetzen: Diejenigen so erhaltenen Geraden, Ebenen und Zirkel sind die richtigen, bei denen die Euklidischen Axiome alle erfüllt sind. Oder besser: Nur dann ist der zur Herstellung dieser Geraden, Ebenen und Zirkel verwendete starre Körper der wirkliche starre Körper, wenn für diese das Parallelenaxiom und die übrigen Sätze der Euklidischen Geometrie erfüllt sind. Wir sehen auch hier, wie sich der starre Körper durch diese Festsetzung selbst kontrolliert und immer weitere Verbesserungen anzubringen gestattet[1].

[1] Man hat sich bekanntlich überzeugt, daß im Endlichen niemals eine endgültige Entscheidung über die Art der Geometrie unseres Raumes durch das geometrische Experiment herbeigeführt werden kann, sondern höchstens in dem praktisch unzugänglichen Unendlichen. Dieser Satz, dessen Formulierung dem Stand-

Führen wir dann nach Beginn unseres Aufbaues der Geometrie möglichst bald in der gewohnten Weise die sog. analytische Geometrie ein, dann können wir die Gesamtheit der logischen Konsequenzen der Euklidischen Annahmen besonders leicht übersehen, indem dann nämlich alles, was die Rechnung ergibt, auch in der Wirklichkeit zutreffen muß. Dies liefert uns eine außerordentlich große Menge von Kontrollen, welche uns sagen, ob die zum Aufbau unserer Geometrie verwendeten Dinge der Wirklichkeit wirkliche starre Körper sind oder waren, sowie in welcher Weise wir eventuell an ihnen Korrekturen anzubringen haben.

Bevor wir uns aber im nächsten Paragraphen dem anderen Wege zuwenden, unsere die Geometrie charakterisierenden a priorischen Gesetze in die Wirklichkeit einzuführen, müssen wir noch eine kurze Betrachtung vorausschicken.

6. Für den zweiten der oben angeführten Wege bedürfen wir nämlich der Kenntnis[1], daß es möglich sei, eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten des Raumes und den Tripeln aller reellen Zahlen $(x, y, z)$ herzustellen. Da es uns zu weit führen würde, ein geometrisches Gebäude aufzustellen, und so früh zu beginnen, daß dieser Satz beweisbar wäre, so sei es erlaubt, wenigstens über die zu seinem Beweise nötigen, vor ihm aufzustellenden Begriffsbildungen einige Bemerkungen zu machen.

Ob wir einen solchen Satz beweisen können, hängt natürlich vollständig davon ab, was wir voraussetzen. Wir werden

---

punkte des § 3 Kap. I entspricht, kann natürlich für uns kein Einwurf sein, da er gegenstandslos wird durch die Untersuchungen des 1. Abschn. dieses Kapitels. Denn wie wir sahen, wird unsere Genauigkeit immer größer, und damit irgendeine Abweichung auch im Endlichen nach und nach feststellbar. Wir konnten aber dortselbst zeigen, daß jede Abweichung stets hebbar sein werde, und damit ist die Geltung der Euklidischen Geometrie in dem Sinne des 1. Abschnitts Kap. III erwiesen.

[1]) Die obige Darlegung soll nur den Zweck haben, anzudeuten, wie wir etwa gerade auf die Dreidimensionalität des Raumes verfallen, von der wir im nächsten § Gebrauch machen werden.

also am besten untersuchen, welche Voraussetzungen nötig sind, den Satz abzuleiten.

7. Setzen wir voraus, es sei möglich, den Raum durch eine Fläche $F_1$ in zwei Teile zu teilen, dabei sei die Fläche nicht geschlossen, einfach zusammenhängend, unbegrenzt und ohne Doppelpunkte, der Raum werde durch $F_1$ geteilt in $R_1$ und $R_2$. Auf gleiche Weise sei etwa $R_2$ durch eine Fläche gleicher Art $F_2$ so teilbar, daß $F_1$ und $F_2$ keine Punkte gemein haben; $F_2$ teile den Raum $R_2$ in $R_3$ und $R_4$, wobei $R_3$ dasjenige Raumstück sei, das sowohl von $F_1$ als von $F_2$ begrenzt wird. Setzen wir nun weiter voraus, daß es möglich sei, jedes derartige, von zwei Flächen begrenzte Raumstück $R_3$ durch eine Fläche $F$ der obigen Art, welche den Gesamtraum in zwei Teile $P_1$ und $P_2$ teilt, derart zu teilen, daß $F_1$ in dem einen, $F_2$ in dem anderen dieser beiden Teile $P_1$ und $P_2$ liegen, und mit $F$ keinen Punkt gemeinsam haben, dann wollen wir sagen, daß nunmehr $F$ „zwischen" $F_2$ und $F_1$ liege.

Nehmen wir also an, daß es möglich sei, zwischen jedes Paar derartiger benachbarter Flächen stets eine weitere solche Fläche zu legen, sowie in jedem der beiden Resträume ebenfalls stets eine solche Fläche zu legen, so daß niemals zwei solche Flächen einen Punkt gemeinsam haben, dann können wir sagen: Jeder Punkt des Raumes liegt auf einer und nur einer derartigen Fläche in einem solchen System; ferner, ich kann eine ein-eindeutige Beziehung zwischen diesen Flächen und den Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ derart herstellen, daß, falls $p$ eine Zahl dieser Reihe ist, welche zwischen den Zahlen $m$ und $n$ dieser Reihe liegt, auch die dem $p$ zugeordnete Fläche zwischen den beiden Flächen liegt, welche den Zahlen $m$ und $n$ zugeordnet sind.

Um weiter zu gehen, machen wir die analoge Überlegung für jede der Flächen genannter Art, aus denen unser Flächensystem besteht.

Wir setzen voraus, daß man jede solche Fläche durch eine nicht geschlossene Linie ohne Doppelpunkte $L_1$ in zwei getrennte Teile teilen könne, sowie daß auf Grund der Teilung durch solche Linien, die sich unter sich nicht schneiden dürfen, ebenfalls die Einführung des Begriffes „zwischen" auf der Fläche möglich sei, in gleicher Weise wie im Raume. Nehmen wir also an, daß man auf jeder derartigen Fläche zwischen je zwei benachbarte sich nicht schneidende Linien eine ebensolche nicht schneidende legen könne, sowie in den beiden Restflächenräumen ebenfalls stets eine, dann ergibt sich, daß durch jeden auf einer solchen Fläche liegenden Punkt eine und nur eine derartige Linie geht in einem solchen System, und daß es möglich ist, die Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ ein-eindeutig derart auf diese Linien einer bestimmten Fläche des Systems zu beziehen, daß wenn $p$ eine Zahl dieser Reihe ist, die zwischen $m$ und $n$ liegt, daß dann auch die zu $p$ zugeordnete Linie zwischen den zu $m$ und $n$ gehörigen liege.

Setzt man schließlich voraus, daß jede derartige Linie durch einen Punkt in zwei getrennte Teile geteilt wird, sowie daß auf Grund der Teilung durch solche Punkte sich der Begriff „zwischen" auf der Linie einführen lasse, dann ergiebt sich, daß genau auf die gleiche Weise wie bei den beiden obigen Fällen den Punkten der Linie die Zahlen der Reihe von $-\infty$ bis $+\infty$ ein-eindeutig zugeordnet werden können.

Wir können also aussprechen:

Unter den angegebenen, der analysis situs angehörigen Voraussetzungen läßt sich beweisen, daß zwischen den Punkten des Raumes und der Mannigfaltigkeit $M_3$ der Tripel aller reellen Zahlen eine ein-eindeutige Zuordnung herstellbar ist.

## § 5. Zum manuellen Aufbau.

1. Wir haben im vorigen Paragraphen von zwei Wegen gesprochen, auf denen man die logischen Gesetze der Geometrie in der Wirklichkeit zur Geltung bringen kann. Den ersten dieser Wege, der im wesentlichen mit dem von Euklid selbst eingeschlagenen Weg zusammenfällt, haben wir schon näher besprochen, soweit dies als nötig erscheint. Jedoch

bedarf der an zweiter Stelle genannte Weg noch einer näheren Darlegung.

Dieser zweite Weg schließt sich, wie schon gesagt, an Ansätze von Riemann, Helmholtz, Lie an. Hier benutzen wir nicht die Elementarvorgänge der Ebene und Geraden, sondern wir benutzen lediglich den starren Körper zur Anknüpfung an die Wirklichkeit. Die logischen Gesetze erscheinen hier in der Form, daß wir den Raum als dreifach unendliche Zahlenmannigfaltigkeit voraussetzen; dann ist die Euklidische Geometrie charakterisiert durch ihre „Entfernungsfunktion":

$$s = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Nun ist aber eine Entfernungsfunktion in der Wirklichkeit ganz bedeutungslos ohne ihre entsprechende zugehörige „Zuordnung" (der Zahltripel zu den Punkten des Raumes), in der sie gilt. (Wenn ich nämlich die Zuordnung ändere, und die Entfernungsfunktion belasse, so wird im allgemeinen, d. h. falls diese Änderung nicht gerade eine Bewegungstransformation der Entfernungsfunktion ist, auch der Begriff der Kongruenz usw. ein anderer.) Und ebenso ist eine Zuordnung bedeutungslos, wenn die zugehörige Entfernungsfunktion nicht bekannt ist (worauf wir schon in Kapitel I, § 7 hinwiesen). Es ist also unsere Aufgabe, die Euklidische Entfernungsfunktion nebst ihrer zugehörigen Zuordnung nun auch tatsächlich im wirklichen Raume einzuführen, d. h. einen manuellen Aufbau der Geometrie (ohne Graden und Ebenen) in der Weise herzustellen, daß die Euklidische Entfernungsfunktion wirklich die Entfernungsfunktion des Raumes wird, d. h. alle aus dieser errechneten Konsequenzen auch tatsächlich im Raume bei unseren Konstruktionen sich bewähren[1].

[1] Eigentlich müßte ja die Euklidische Entfernungsfunktion auch als „einfachste" Entfernungsfunktion herleitbar sein. Doch sind wir, wie gesagt, in diesen Begriffsbildungen noch nicht weit genug vorgedrungen, um dies einwandfrei machen zu können. Die umgekehrte Aufgabe, von dieser Entfernungsfunktion nachzuweisen, daß sie die einfachste ist, bedürfte natürlich ebenfalls einer hier verwertbaren Definition von „einfachst", doch gibt es eine große

Nehmen wir also die Euklidische Entfernungsfunktion als gegeben an, dann ist unsere Aufgabe jetzt die, eine derartige Zuordnung mittels eines derartigen starren Körpers einzuführen, daß die rechnerischen Konsequenzen stets und überall in der Wirklichkeit erfüllt sind. Dies gelingt nun so: Wir nehmen einen beliebigen Körper als starren Körper an, und machen mit ihm in der alsbald zu beschreibenden Weise die betr. Zuordnung. Prüfen wir dann die rechnerischen Konsequenzen der Euklidischen Enfernungsfunktion in der Wirklichkeit, so werden wir Abweichungen finden. Wir verändern dann unseren starren Körper in geeigneter Weise (indem wir gemäß Kapitel I, § 6 diejenigen Umstände möglichst ausschalten, welche eine solche Veränderung unseres starren Körpers bewirkten, daß er den Euklidischen Gesetzen nicht folgte) und machen mit dem verbesserten starren Körper die Zuordnung von neuem, worauf sich ein besseres Erfülltsein der Euklidischen Gesetze herausstellen wird, aber immer noch Abweichungen konstatierbar sein werden, die wieder entfernt werden müssen usw.[1]

Für gewöhnlich wird die „Entfernung zweier Punkte des Raumes" definiert als die „Länge" der zwischen ihnen gezogenen „geraden Strecke". Gehen wir jedoch vom starren Körper aus, dann sind uns diese Begriffe zunächst nicht zugänglich, sie werden vielmehr erst im weiteren Aufbau als „abgeleitete Begriffe" sich ergeben. Für uns ist die Ent-

---

Reihe von Umständen, welche uns eigentlich absolute Sicherheit geben, daß dies tatsächlich die einfachste ist. Wir brauchen die allbekannten Eigenschaften der Euklidischen Entfernungsfunktion, welche sie in dieser Weise auszeichnen nicht einzeln anzuführen. Im übrigen werden wir am Ende dieses Paragraphen eine Überlegung anfügen, welche erlaubt, die Euklidische vor den Nichteuklidischen Entfernungsfunktionen auszuzeichnen.

[1] Diese Überlegung wird in diesem Paragraphen noch öfter nötig sein, nämlich überall da, wo es sich darum handelt, die Wirklichkeit mit den logischen Konsequenzen unserer Gesetze in Einklang zu bringen. Es ist dies hier ganz analog wie bei den verschiedenen in Kap. II und Kap. III bisher behandelten Beispielen.

fernung hier zunächst lediglich eine zu zwei Punkten zugeordnete Zahl, die, ohne daß wir den Begriff der Geraden hierzu nötig haben, allein durch den starren Körper, die Euklidische Entfernungsfunktion und einige geeignete, ein für allemal getroffene Festsetzungen für jedes Punktepaar völlig bestimmt ist, wie wir sogleich sehen werden. Die Gerade und ihre Länge werden erst später mit diesen Mitteln zu definieren sein.

2. Um also eine solche Zuordnung manuell herzustellen, nehmen wir einen Raumpunkt und legen um ihn mittels eines starren Körpers eine beliebige Kugel[1]. Diesem Raumpunkte ordnen wir das Zahlentripel (0, 0, 0) zu, und sagen, der Radius der Kugel sei gleich 1, da nun die Euklidische Entfernungsfunktion gelten soll, so enthält diese Kugel alle Trippel, welche der Gleichung

$$(0-x)^2+(0-y)^2+(0-z)^2=1 \tag{1.}$$

genügen. Irgendeinen Punkt der Kugelfläche nennen wir nun (0, 0, 1) und legen um ihn wieder eine Kugel vom Radius 1. Diese beiden Kugeln schneiden sich in der Kurve:

$$z=\frac{1}{2} \qquad x^2+y^2+z^2=1. \tag{2.}$$

Wählen wir dann auf dieser Kurve wieder einen Punkt, und geben ihm einen Namen, der 2. genügt, so ist weiterhin außer einer leicht zu beseitigenden Zweideutigkeit nichts mehr willkürlich, und wir können alle Punkte, die wir konstruieren können, berechnen.

Wir wollen nun zeigen, daß wir auf diesem Wege zu Punkten gelangen können, deren Namen sich beliebig wenig von irgendeinem vorgegebenen Zahlentripel (mit anderen Gliedern) unterscheidet, was auch dazu führt, daß wir jedem

[1] Wobei wir unter „Kugel" in der Wirklichkeit ein Gebilde verstehen, das genau wie gewöhnlich als die Gesamtheit aller Lagen eines Punktes entstanden ist, der zu einem auf einem starren Körper starr fixierten Punktepaar gehört, und dessen Partner festgehalten wurde, während er selbst alle noch möglichen Lagen einnahm.

beliebigen Raumpunkt, der aufzeigbar ist, beliebig nahe kommen. Denn gäbe es einen erreichbaren Punkt, dem wir nicht beliebig nahe kommen können, mit unserer Konstruktion, so würde daraus, wie wir sehen werden, zu schließen sein, daß unser starrer Körper nicht der richtige war.

3. Man gelangt nämlich, wenn man auf die oben angegebene Weise weitere Punkte konstruiert und berechnet, sehr bald zu Punkten, deren berechenbare Entfernung kleiner ist als die gegebene Entfernung 1[1]. Damit wird uns also eine neue Entfernung $d$ bekannt, und wir können Kugeln mit diesem Radius ziehen. Schlagen wir dann eine Kugel vom Radius $d$ um (0, 0, 0,) dann wird auf ihr von den beiden in voriger Nummer benutzten Kugeln vom Radius 1 (deren Mittelpunkte sich auf der Kugel 1 befinden) resp. von deren Schnittkreis ein berechenbarer Punkt ausgeschnitten, sowie von jeder dieser Kugeln ein Schnittkreis auf der $d$-Kugel, der durch den genannten Punkt geht. Wir können daher jetzt unsere $d$-Kugel in genau der gleichen Weise benutzen, wie oben die 1-Kugel, indem wir um den berechenbaren Punkt der $d$-Kugel eine weitere $d$-Kugel legen. Der Schnittkreis dieser mit der ersten $d$-Kugel schneidet einen der durch den Punkt gehenden genannten Kreise, wodurch wir einen berechenbaren Punkt auf dem Schnittkreise der beiden $d$-Kugeln erhalten, wodurch nun alles nötige vorhanden ist, um genau die gleiche Konstruktion mit den $d$-Kugeln ausführen zu können, welche uns oben bei den Einheitskugeln zu einer

[1] Der Kreis 2 hat z. B. den Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Eine Kugel vom Radius 1 und dem Zentrum auf seiner Peripherie schneidet „Sehnen" von der Länge 1 aus, deren Zentriwinkel ca. 70° 31′,8 ist. Legt man um einen so gewonnenen neuen Punkt des Kreises wieder eine solche Kugel und so weiter viermal, so erhält man schließlich zwei Punkte, deren zugehöriger Zentriwinkel 7° 21′,6 und deren Entfernung ca. 0,112 ist. (Ob eine Kugel von kleinerem Radius [= Entfernungszahl] von einer konzentrischen von größerem Radius [ebenfalls berechnet] gänzlich umschlossen wird, ist ebenfalls eine Kontrolle für unsern starren Körper, wie alle übrigen errechneten Konsequenzen).

kleineren Entfernung führte. Da die ganze zweite Konstruktion eine geometrisch ähnliche zur ersten ist (zunächst im analytischen Sinne), so gelangen wir auch bei der Konstruktion mit den $d$-Kugeln zu einer Entfernung $d'$, welche kleiner als $d$ ist, und zwar in dem gleichen Verhältnis zu $d$ verkleinert ist, wie dieses gegen 1. Mit dieser Entfernung $d'$ können wir genau so verfahren, wie mit $d$ usw. Man sieht, daß das Verfahren konvergiert und beliebig kleine Entfernungen liefert.

Dabei ist unter diesen „beliebig kleinen" Entfernungen folgendes zu verstehen: Die vorstehende Überlegung zeigt natürlich nur, daß es auf dem genannten Wege gelingt, Punkte zu erhalten, für deren zugeordnete Zahlentripel die entsprechende Entfernungszahl beliebig klein wird. Nehmen wir an, diesen würden nicht auch zugleich beliebig kleine (empirisch genommen) wirkliche Entfernungen entsprechen, dann würde z. B. eine solche Entfernung sich analytisch öfter hintereinander als Sehne in einem Kreis eintragen lassen, als empirisch in dem entsprechendem empirischen Kreis. Das wäre aber ein Zeichen, daß unser starrer Körper nicht der richtige ist, daß wir ihn geeignet korrigieren müßten. Man kann sich leicht beliebig viele Konsequenzen ausdenken, welche sich daraus ergeben müßten, daß wir nicht beliebig kleine wirkliche Entfernungen auf unserem Wege erhalten, und welche mit den rechnerischen Konsequenzen in Widerspruch stünden. Immer, wo ein derartiger Widerspruch auftritt ist er ein Zeichen, daß unser starrer Körper korrigiert werden muß. Dabei kann er an verschiedenen Orten des Raumes ganz verschieden korrigiert werden müssen, da ja dort ganz verschiedene störende Umstände wirksam sein können. Das Kriterium dafür, daß keine solchen mehr vorhanden sind, ist eben das Erfülltsein der Gesetze der Euklidischen Geometrie, der Euklidischen Bewegung[1].

4. Ebenso wollen wir nun zeigen, daß wir beliebig große Entfernungen erhalten können. Es ist klar aus

[1]) s. hiezu Anhang II.

Vorstehendem, daß, wenn auf einer Kugel zwei Punkte bekannt sind, daß sich dann beliebig viele auf ihr finden lassen. Nehmen wir also eine uns bekannte Kugel um (0, 0, 0), auf der uns zwei Punkte bekannt sind. Um den einen von diesen legen wir eine Kugel, die durch den anderen Punkt geht. Auf dem Schnittkreise der beiden Kugeln finden wir leicht irgendeinen weiteren bekannten Punkt, und somit können wir beliebig viele Punkte über die ganze zweite Kugel erhalten. Also auch auf der Seite von ihr, die außerhalb der ersten Kugel liegt, können Punkte gefunden werden, und diese haben von (0, 0, 0) eine weitere Entfernung als die Punkte der ersten Kugel, womit größere Entfernungen gewonnen sind, die sich in gleicher Weise benutzen lassen. Es läßt sich nun leicht irgendein Verfahren angeben, das für alle Kugeln verwendbar ist, und das deren Radius um ein Stück vergrößert, das von einer bestimmten Größe des Radius ab sicher niemals kleiner ist als eine gegebene endliche Zahl. (Ein solches Verfahren erhält man z. B. wenn man den gemeinsamen [äußeren] Schnittpunkt dreier Kugeln vom gleichem Radius benutzt, deren Zentren auf der gegebenen Kugel liegen, und von denen jede durch die Zentren der beiden anderen geht). Es ergibt sich also, daß wir durch Fortsetzung dieses Verfahrens Radien von beliebiger Größe erhalten können. Über das Verhältnis zur Wirklichkeit gilt genau das Analoge wie in der vorigen Nummer.

Auf Grund des Vorstehenden ist es nun klar, daß wir tatsächlich bei unserem Vorgehen zu jedem Punkte mit vorgegebenem Namen Punkte erreichen können, deren Namen sich nun beliebig wenig von dem vorgegebenen unterscheiden, womit die Behauptung des Nr. 2 erwiesen ist. Wenn wir schließlich noch das Cantorsche Axiom für die bei unserer Konstruktion auftretenden Kreise als Festsetzung treffen, so wird jedem Zahlentripel ein Punkt zugeordnet sein, und wenn wir uns erinnern, daß die Zuordnung so ausgeführt werden sollte, daß alle Punkte des Raumes Namen bekamen, dann sehen wir, daß auch umgekehrt jedem Punkte ein Zahlentripel entspricht.

5. Wir sehen also, daß es tatsächlich möglich ist, mittels des starren Körpers allein die Euklidische Zuordnung im Raume einzuführen[1]. Ob bei diesem Aufbau außer den genannten noch solche Kontrollen auftreten, welche darin bestehen, daß ein und derselbe Punkt auf verschiedenen Wegen zu erhalten ist, das bedürfte einer eigenen Untersuchung. Wenn solche vorkommen, dann gilt

[1] Es ist dieser Nachweis ein sehr altes Problem, mit dem sich wohl viele Mathematiker beschäftigt haben, wenn auch nicht immer etwas davon in die Öffentlichkeit drang. Indem man die außerordentliche Bedeutung der Kugel (oder des Kreises in der Ebene) für den Aufbau der Geometrie betrachtete, sich an die Möglichkeit einer Definition von Ebene und Gerade durch sie erinnerte (was z. B. Lobatschefsky ausspricht, was aber sicher schon lange bekannt war) mußte man darauf verfallen, zu probieren, die Schwierigkeit des Euklidischen Parallelenaxioms dadurch zu umgehen, daß man versuchte, die Geometrie auf dem Begriffe der Kugel aufzubauen. Es ist sehr möglich (und mir persönlich äußerst wahrscheinlich), daß die berühmten Untersuchungen von Mascheroni und von Steiner, Riemann und Helmholtz im letzten Grunde aus ähnlichen Ideen entsprangen. Von den Untersuchungen S. Lies wissen wir dies sogar bestimmt (s. die Bemerkung von Engel im Nachruf auf S. Lie, Jahresbericht d. D. Math. Vergg. VIII. 1900. p. 33, 34. Aus der Zeit, bevor Lie sein wahrer Beruf aufgegangen war, heißt es dort: „er versuchte da die Geometrie, ähnlich wie es Lobatschefsky und Bolyai getan haben, auf den Begriff der Kugel zu gründen".) Unsere obigen Untersuchungen zeigen, warum diese Versuche, die zu so ausgezeichneten und fundamentalen anderen Forschungen den Anlaß gaben, nicht zu ihrem eigentlichen Ziele gelangen konnten. Ohne die grundlegende Wendung, die wir oben nahmen, indem wir alles, was in der Wirklichkeit den Euklidischen Gesetzen widerspricht, den störenden Umständen zuschreiben, die auszumerzen sind, mußten diese Versuche stets an dem Umstande scheitern, daß es unmöglich schien, nachzuweisen, daß die Eigenschaften, welche die Euklidische Geometrie diesen Kugelkonstruktionen vorschreibt, auch tatsächlich in der Wirklichkeit erfüllt waren. Erst eine eingehende Kenntnis der Art des Zusammenhanges zwischen Logik und Wirklichkeit in der Geometrie konnte, wie wir oben sahen, diese Schwierigkeiten überwinden lassen.

auch für deren Geltung in der Wirklichkeit, das im 1. Abschnitte dieses Kapitels darüber gesagte, daß nämlich die Genauigkeit ihres Eintreffens von der Genauigkeit des starren Körpers und unserer Konstruktion abhängt.

6. Wie aber erhalten wir nun den Anschluß der so aufgebauten analytischen Geometrie an die gewöhnliche?

Dieser geschieht durch die Einführung der Geraden. Während nämlich sonst diese Linie (neben der Ebene) die Grundlage bildet, bei der Einführung der analytischen Geometrie, sowie der Geometrie überhaupt, tritt sie hier als ein abgeleiteter Begriff auf.

Bezeichnen wir:

$$D(1,2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

dann gelte

a) $$D(1,2) = -D(2,1).$$

Dann können wir die Gerade definieren, als die Linie, längs deren sich die Entfernungen addieren (Maßlinie).

Drei Punkte 1, 2, 3 liegen dann auf einer Geraden, wenn gilt:

b) $$D(1,2) + D(2,3) + D(3,1) = 0.$$

Halten wir zwei der Punkte fest, etwa 1 und 2, und bezeichnen den dritten als laufenden Punkt mit $x$, so erhalten wir die folgenden drei Gleichungen, welche gemeinsam die Gerade darstellen:

c) $$\begin{aligned} |D(1,x)| + |D(x,2)| &= |D(1,2)| \\ |D(1,x)| - |D(x,2)| &= |D(1,2)| \\ -|D(1,x)| + |D(x,2)| &= |D(1,2)| \end{aligned}$$

Ausführlich geschrieben kommt hierfür:

d) $$\begin{aligned} &\pm \sqrt{(a_1 - x)^2 + (b_1 - y)^2 + (c_1 - z)^2} \\ &\pm \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2} \\ &= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2} \end{aligned}$$

oder nach Umformung, wobei alle drei Fälle in einen zusammenfließen:

$$\text{e)} \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ b_1 & c_1 & 1 \\ b_2 & c_2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x & 1 \\ c_1 & a_1 & 1 \\ c_2 & a_2 & 1 \end{vmatrix}^2 = 0$$

welche Gleichung zeigt, daß die Gerade durch zwei allgemeine Gleichungen 1. Grades in der Euklidischen Zuordnung dargestellt wird.

Man zeigt leicht aus der Gleichung e, daß wir die zu zwei Punkten gehörige Gerade oder Maßlinie erhalten, wenn wir um jeden dieser Punkte als Mittelpunkt zwei Kugeln legen, die sich (in einem Punkte) berühren; jeder solche Berührungspunkt, mag die Berührung der beiden Kugeln von innen oder von außen stattfinden, ist ein Punkt der Maßlinie. Damit haben wir eine punktweise Konstruktion der Maßlinie, die aber mit „Probieren" arbeitet. Die eigentliche Definition der Maßlinie ist eben analytisch in Gleichung b gegeben. Es ergeben sich nun rein rechnerisch beliebig viele Sätze über die Maßlinien.

Nunmehr sind wir in der Lage, den Begriff der Länge einer Linie zu definieren. Wir sagen nämlich: Die Entfernungszahl zweier gegebener Raumpunkte gibt die Länge der sie verbindenden Strecke der zugehörigen Maßlinie (gerade Strecke) an. Es sei nur darauf hingewiesen, daß damit auch die Länge von allen gekrümmten (d. h. nicht geraden) Kurvenstücken bestimmt ist, welche sich an der Grenze aus beliebig kleinen Stücken von Maßlinien zusammengesetzt denken lassen, und bei denen das Resultat des Grenzüberganges von der besonderen Art dieser Zusammensetzung unabhängig ist.

7. Inwieweit stimmt nun diese Maßlinie, die wir schon oben als „Gerade" bezeichneten, mit der gewöhnlichen Geraden unseres Raumes überein? Die Antwort auf diese Frage ergibt folgende Überlegung: Auch in dem Euklidischen Aufbau der Geometrie messen wir die Entfernungen längs der Geraden, und insbesondere lassen wir die Entfernungen sich längs der Geraden algebraisch

addieren. Da es nun durch zwei Punkte nur eine Maßlinie, d. h. nur eine Linie in unserem Aufbau gibt, längs deren sich die Entfernungen addieren (was sich unschwer analytisch nachweisen läßt, indem man beachtet, daß diese Linie eine lineare Gleichung hat, siehe Gleichung e), da es ferner in dem Euklidischen Aufbau ebenfalls nur eine solche Linie durch zwei Punkte gibt, längs deren sich die Entfernungen addieren (was aus dem Satze folgt, daß die Summe zweier Dreieckseiten größer, ihre Differenz kleiner als die dritte Seite ist), und da schließlich die Entfernungen unseres und des Euklidischen Aufbaues die gleichen sind, so folgt, daß die Gerade mit der Maßlinie identisch ist, womit der Zusammenhang unseres Aufbaues mit der gewöhnlichen Geometrie erreicht ist.

8. Damit ist nun auch der zweite der beiden im vorigen Paragraphen genannten Wege, die Gesetze der Geometrie in die Wirklichkeit einzuführen, aufgezeigt. Das Interesse an diesem zweiten Wege ist natürlich nur ein rein theoretisches. Daß historisch das Euklidische System allein möglich war, ergibt sich daraus, daß, um das zweite, Riemannsche, wie wir es nennen wollen, aufzustellen, die vorherige Ableitung oder Kenntnis der Euklidischen Entfernungsfunktion nötig gewesen wäre, während bei Euklides nur das Parallelenaxiom (oder ein ihm äquivalenter Satz) nebst den übrigen Axiomen vorausgesetzt werden mußte, die ungleich leichter aufzufinden und zu formulieren waren. Nichtsdestoweniger dürfte dem Riemannschen System ein gewisser theoretischer Wert nicht abzusprechen sein, ja, schon allein die Tatsache seiner Existenz möchte uns in mancher Hinsicht recht lehrreich dünken. Insbesondere übertrifft das Riemannsche System das Euklidische sehr an Kürze seines „Axiomsystems". Denn die beiden einzigen Axiome des ersteren, welche dem logischen Gebäude dieser Geometrie zugrunde liegen, sind:

a) Der Raum ist eine dreifach unendliche Zahlenmannigfaltigkeit (um mit S. Lie zu sprechen).

b) Die Entfernungsfunktion des Raumes ist:

$$D(1, 2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$ [1]

Allerdings ist dafür die Anknüpfung dieses logischen Gebäudes an die Wirklichkeit, wie wir sahen, eine etwas umständlichere, als im Falle des Euklidischen Systems.

9. Wir wollen uns schließlich noch mit einer Frage beschäftigen, welche sich bei Betrachtung gewisser früherer Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie aufdrängt. Wir sahen (Kap. I, § 8), daß Helmholtz bei Abfassung seiner ersten Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie der Meinung war, es sei ihm der Beweis gelungen, daß man den Euklidischen Raum im wesentlichen durch die Voraussetzung der „freien Beweglichkeit" der starren Körper charakterisieren könne. Er fand jedoch später, daß er übersehen hatte, daß man eine von ihm verwendete Konstante auch rein imaginär annehmen könne, wodurch der Fall der Lobatschefskyschen Geometrie sich als nicht ausgeschlossen erwies. Es ergab sich also, und Helmholtz spricht dies auch deutlich aus[2], daß der Raum sich durch diese Annahme noch nicht als der Euklidische charakterisieren lasse, falls man den von Helmholtz gewählten Ansatz machte. Damit war die Hoffnung etwa durch diese plausible Annahme der freien Beweglichkeit das Parallelenaxiom ersetzen zu können, gescheitert. Auch die späteren Lieschen Untersuchungen ergaben übereinstimmend, daß die Forderung der freien Beweglichkeit der Körper auf die drei verschiedenen Arten der Geometrie hinführt. Da man aber sonst von der Bewegung der Körper nichts einfaches zu verlangen hatte, so schien damit ein Beweis für die völlige Gleichberechtigung dieser drei Geometrien geliefert. Wir hatten mehrfach Gelegenheit, uns von den Konsequenzen dieses Resultates für die Anschauungen von dem Zusammenhange der Geometrie mit der Wirklichkeit zu überzeugen.

---

[1] Wozu dann aber eigentlich noch die Axiome der Arithmetik gerechnet werden müssen.

[2] Wir haben die Stelle (3. Abh. p. 22) in Kap. I, § 8, bereits angeführt (S. 38).

Wir wollen versuchen, der eben ausgesprochenen, immerhin bemerkenswerten Tatsache in Kürze etwas nachzugehen.

Fragen wir nämlich z. B., auf welchen Flächen Stücke von ihnen selbst ohne Dehnung frei bewegt werden können, so finden wir bekanntlich als solche die Flächen konstanter Krümmung. Denn nach dem Gaußschen Satze können nur Flächen konstanter Krümmung beliebig auf sich selbst abgewickelt werden, bei diesen ist dies aber, wie man leicht beweist[1], stets möglich. Diese Eigenschaft dieser Flächen ist eine rein analytisch faßbare, und hängt nur von der Form des Linienelementes der betreffenden Fläche ab.

Genau das Analoge ergibt sich aber für höhere Räume, wenn wir für diese die Frage behandeln. Fragen wir nach denjenigen $n$-dimensionalen Räumen, bei denen jede Figur frei und ohne Dehnung bewegt werden kann (d. h. ohne Änderung der Strecken und Winkel, und um jeden Punkt beliebig drehbar), dann finden wir auch hier die Räume konstanter Krümmung als diejenigen, welche allein und stets dieser Forderung genügen[2]. Dies sagt aber wieder genau den obigen Satz aus, daß durch die Forderung der freien Beweglichkeit der Figuren ein Raum noch nicht als Euklidischer charakterisierbar ist. Fragt man nun aber nach einer Eigenschaft, welche geeignet ist, den Euklidischen Raum gegen die anderen auszuzeichnen, so findet man eine ziemlich anschauliche solche Eigenschaft etwa durch folgende einfache Überlegung. Fordern wir nämlich, daß man in dem Raume $R_n$ ein derartiges Parametersystem $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n$ einführen kann, daß jeweils die Hyperflächen $u_i =$ const. durch die $u$-Parameterlinien isometrisch aufeinander bezogen werden, so ergibt sich, daß dies nur in Euklidischen Räumen der Fall sein kann, in diesen aber zutrifft.

[1] S. z. B. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig 1899, § 96 und 97.

[2] Bianchi, l. c. § 321.

In der Tat sei das Linienelement des betreffenden $n$-dimensionalen Raumes:

1. $$ds^2 = \sum^{ik} A_{ik}\, du_i\, du_k \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

dann bedeutet unsere Forderung, wenn wir sie zunächst einmal für den Parameter $u_1$ aussprechen, daß die Linienelemente zweier konsekutiver Hyperflächen $u_1 = \text{const}$ identisch gleich sein sollen. Das gibt uns, wenn wir die Hyperfläche, für welche $u_1 = c$ (Konstante) ist, herausgreifen:

2. $$(ds^2)_{u_1 = c} = (ds^2)_{u_1 = c + \varepsilon}$$

wo $\varepsilon = du_1$ eine beliebig kleine konstante Größe bedeutet. Nehmen wir die Fundamentalgrößen $A_{ik}$ als analytische Funktionen der einzelnen Parameter $u_i$ an; dann können wir, falls $\varepsilon$ genügend klein genommen wird, schreiben:

$$(A_{ik})_{u_1 = c + \varepsilon} = (A_{ik})_{u_1 = c} + \frac{\varepsilon}{1}\left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial u_1}\right)_{u_1 = c}$$

und wenn wir dies in Gleichung 2 einsetzen, so folgt:

2'. $$0 = \frac{\varepsilon}{1} \sum^{ik} \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial u_1}\right)_{u_1 = c} du_i\, du_k.$$

Beachtet man nun, daß die $du_i$ ganz unabhängige Zuwachse sind, so ergibt sich hieraus unmittelbar:

3. $$\frac{\partial A_{ik}}{\partial u_1} = 0 \quad (i, k = 1, 2 \ldots n),$$

da die Gleichung 2' für jedes beliebige $u_1$ richtig sein soll. Wir haben das Resultat: Soll eine Schar der Parameterhyperflächen die genannte Eigenschaft haben, dann müssen die Koeffizienten des Linienelementes des betr. Raumes frei sein von dem betreffenden Parameter. Verlangen wir diese Eigenschaft für sämtliche n Parameter des Raumes, dann erhalten wir den Satz:

Das Linienelement eines Raumes der verlangten Art hat die Form:

$$ds^2 = \sum^{ik} a_{ik}\, du_i\, du_k \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

wo die $a_{ik}$ Konstante. Dies aber ist das Linienelement der sog. ebenen oder Euklidischen Räume.

Das Resultat dieser Überlegung wird anschaulich, wenn wir es auf den Fall $n=2$ anwenden. Denken wir uns auf der Ebene ein aus 2 Scharen paralleler Geraden bestehendes Koordinatensystem. Dann ist es möglich jede ebene Figur isometrisch (d. h. ohne Dehnung) so zu verschieben, daß jeder ihrer Punkte sich beständig längs der gleichen Geraden der einen Schar bewegt. Und zwar ist eine solche Translation längs jeder der beiden geraden Scharen möglich. Unser Satz sagt nun aus, daß dies auch nur bei der Ebene möglich ist[1], nicht aber bei Flächen eines anderen Krümmungsmaßes, speziell also auch nicht bei den Flächen konstanten, nicht verschwindenden Krümmungsmaßes. In der Tat, betrachten wir z. B. eine Kugel, so ist es nicht möglich, ein derartiges Parametersystem auf ihr einzuführen, daß sich eine sphärische Figur längs jeder der beiden Parameterlinienscharen im obigen Sinne bewegen läßt[2].

Allgemein können wir sagen: in Räumen nicht verschwindender Krümmung läßt sich kein derartiges Parametersystem einführen, daß es möglich wäre, eine Figur, die in einer Parameterhyperfläche liegt, oder besser eine Parameterhyperfläche selbst isometrisch längs der zugehörigen Parameterlinien zu verschieben, und daß dies für alle Parameter ohne Ausnahme möglich wäre.

In der angeführten Eigenschaft der Euklidischen Räume kann tatsächlich eine Vereinfachung gegenüber den nicht-Euklidischen Räumen gefunden werden und man kann sie daher ebenfalls zur Begründung unserer Wahl in Verwendung bringen[3].

[1] Und den zu ihr isometrischen Flächen natürlich.

[2] Im Parametersystem der Meridiane und Parallelkreise z. B. ist eine solche Verschiebung nur längs der letzteren möglich.

[3] Mit diesem Umstande hängt es auch zusammen, wenn man gelegentlich liest, daß sich im Nichteuklidischen Raume die Körper nur mit Deformation bewegen lassen — ein Satz, der an sich sinnlos wäre, da ja die Konstatierung dieser Deformation eine bereits eingeführte Geometrie voraussetzt.

## § 6. Neuere Autoren.

Nachdem wir unsere Untersuchung nunmehr zu Ende gebracht haben, müssen wir uns wieder einer kurzen Betrachtung der bisherigen Forschung zuwenden, und zwar werden wir uns dabei auf einige neuere Autoren zu beschränken haben, die speziell über die Grundlagen der Geometrie in unserem Sinne arbeiteten, da die übrigen Forscher bereits im ersten und zweiten Kapitel Berücksichtigung fanden.

Unter den Forschern, welche sich in neuester Zeit mit den Grundlagen der Geometrie in unserem Sinne beschäftigt haben, ist wohl an erster Stelle J. Wellstein zu nennen. Herr Wellstein hat in dem ersten Buche des zweiten Bandes der von ihm zusammen mit H. Weber herausgegebenen „Enzyklopädie der Elementarmathematik“[1] eine Studie über die Grundlagen der Geometrie geschrieben, welche mir zum Besten zu gehören scheint, das wir über diesen Gegenstand besitzen. Leider sind wir, da sich dies wohl kaum auf kleinerem Raume machen ließe, hier nicht in der Lage, in eine ausführlichere Analyse dieser vorzüglichen Arbeit einzutreten[2]. Was uns besonders wichtig an dieser Untersuchung erscheint, ist, daß Herr Wellstein den Zusammenhang der geometrischen Theorie mit der Wirklichkeit einer eingehenden Betrachtung unterzieht, wobei zu präzisen und neuen Fragestellungen vorgeschritten wird, und ausdrücklich betont wird, daß der Matematiker den auftretenden Schwierigkeiten nicht aus dem Wege gehen dürfe (l. c. p. 110). Die grundlegenden Sätze der Geometrie werden als „Hypothesen“ betrachtet, die durch die Erfahrung nahegelegt werden, es könnte aber auch, wie in der Physik, vorkommen, daß eine Hypothese sich nicht durchführen läßt (p. 149).

Ein Referat über die Gesamtheit der wissenschaftlichen Forschung über die Grundlagen der Geometrie besitzen wir

[1] 2. Aufl. Leipzig 1907.

[2] Deren dieselbe wegen der vielen neuen und anregenden Gedanken, die in ihr enthalten sind, besonders würdig wäre.

in dem verdienstvollen Berichte von F. Enriques für die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften[1]. Die uns hier interessierenden Fragen sind dort in der bereits besprochenen Anschauungsweise behandelt, wie wir sie vor dem Auftreten Poincarés finden (s. oben Kap. II, § 14).

Die gleichen Fragen hat Herr Enriques ausführlich noch in einem Werke „Problemi della scienza" behandelt[2]. Die Grundanschauung des Verfassers ergibt sich wohl am deutlichsten aus der folgenden Stelle (l. c. II, p. 275): „Die Genauigkeit der Geometrie erhält nun also eine genau bestimmte Bedeutung: sie ist eine in jedem Moment des wissenschaftlichen Fortschritts durch die gemachten Erfahrungen bis zu einem gewissen Grade verifizierte Hypothese, die die Ergebnisse anderer möglicher Versuche vorwegnimmt. Und es ist klar, daß diese Hypothese niemals endgültig bewiesen werden kann, da die Reihe der möglichen Versuche unbegrenzt ist. Nichts hindert jedoch, daß sie widerlegt wird."

Der Verfasser möchte den Versuch machen, „die Anschauung dadurch zu erklären, daß man sie als das Ergebnis einer von den Sinneswahrnehmungen ausgehenden psychischen Entwickelung auffaßt, wobei die Struktur des Subjekts berücksichtigt wird" (l. c. II, p. 298). Auf diesem Wege kommt der Verfasser über Betrachtungen unserer verschiedenen Sinnesorgane und psychologischen Darlegungen (welche abseits des Weges der hier geführten Untersuchungen liegen) zu dem Resultate: „Das Parallelenpostulat entsteht also aus der Verschmelzung des Tast- und Gesichtsraumes, die uns zu dem metrisch-projektiven Raumbegriffe führt" (p. 342). Da nach Ansicht des Autors parallele Gerade optisch als nicht

---

[1] „Pinzipien der Geometrie" III, A. B. I.

[2] F. Enriquez, Probleme der Wissenschaft, übersetzt von Kurt Grelling. I, II, Leipzig 1910. Ich verdanke einen Einblick in die von den Grundlagen der Geometrie handelnden Teile dieses demnächst erscheinenden Werkes der besonderen Liebenswürdigkeit des Übersetzers, Herrn Kurt Grelling (Göttingen).

schneidende, der Tastvorstellung als äquidistante Linien erscheinen, so schließt er: „Die Verbindung ergibt, daß zwei Parallele als äquidistante Gerade (einer Ebene) betrachtet werden" (p. 341), welcher Satz das Parallelenaxiom einschließen würde[1].

Ganz ähnliche Anschauungen, wie wir sie bereits bei mehreren Forschern bezüglich des Zusammenhanges von Theorie und Wirklichkeit in der Geometrie gefunden haben, äußert Herr O. Hölder in seinem Buche „Anschauung und Denken in der Geometrie"[2]. Er sagt (p. 71): „Gewiss ist es äußerst unwahrscheinlich, daß schließlich die Geometrie von der Umbildung betroffen werden würde; als absolut unmöglich kann dies aber doch nicht bezeichnet werden." Es ist das genau das, was auf Grund der damaligen Kenntnisse unter Erwägung aller Umstände als erwiesen ausgesprochen werden konnte. Her Hölder weist auch darauf hin, daß „die geometrische Methode noch immer nicht genug untersucht" sei. Ferner müssen wir einer inhaltreichen Abhandlung von G. Hessenberg[3] „Über die kritische Mathematik" gedenken, welche verschiedene der hier behandelten Fragen in klarer und prägnanter Form bespricht, sowie eines Buches von E. König[4], welcher die Entwicklung der bisherigen Anschauung vom philosophischen Standpunkt aus in wie es scheint, mustergültiger Weise darstellt. Neuestens hat Herr A. Voß diese Fragen ausführlich behandelt („Über das Wesen der Mathematik", p. 74 bis 87), worauf wir oben schon hinweisen mußten.

[1] Bezüglich Gerade und Ebene sagt Herr Enriques (l. c. p. 319) die ausgezeichnete Stellung der Gerade und Ebene scheint „zum großen Teil unmittelbar erworben zu sein".

Wir führen die letzteren Darlegungen im Texte, welche ihres rein psychologischen Charakters wegen sich einer näheren Behandlung hier entziehen, nur an, um auch für eine derartige Behandlungsart dieser Probleme ein Beispiel zu geben.

[2] Akad. Antrittsvorlesung (22, 7, 1899).

[3] Arch. Math. Phys. III. Reihe. (VII, 1904).

[4] „Kant und die Naturwissenschaft", Sammlung „Die Wissenschaft", Hannover.

# Anhang I.

## Zur empirischen Definition der Ebene und Geraden.

Wir wollen, wie früher schon gesagt, hier noch kurz die Methoden andeuten, mittels deren man etwa in der Lage wäre zu beweisen, daß die in Kap. I § 5 gegebene empirische Definition von Ebene und Gerade Gebilde liefert, welche den gleichen Axiomen gehorchen, wie sie in der Geometrie des Euklid von den Ebenen und Geraden ausgesagt werden.

Ein naheliegender Weg wäre hier etwa folgender: Man zeigt analytisch, innerhalb des Formelsystems der sog. Euklidischen analytischen Geometrie, daß die Fläche, der eine Gleichung ersten Grades zukommt, die einzige ist, welcher die Eigenschaft zukommt, die in der obengenannten empirischen Definition ausgesagt wird. Damit wäre dann bewiesen, daß wenn wir umgekehrt diejenige Fläche suchen, welche diese Eigenschaft hat, wir gerade auf diejenige stoßen, deren Gleichung vom ersten Grade ist. Nun ist aber diese auch enthalten unter denjenigen Flächen, welche den Euklidischen Axiomen völlig genügen. Wir müssen daher schließen, daß unsere empirische Definitionsart zum mindesten die Euklidische unter sich begreift. Von der Geraden gilt dann natürlich wörtlich das gleiche.

Ein völlig anderer, und, wie es scheint, außerordentlich schwieriger Weg wäre der, die bei der empirischen Herstellung der Ebene gebrauchten Operationen der Wirklichkeit direkt in die logische Zeichensprache umzusetzen, und von diesen so entstehenden „Axiomen" auf rein logischem Wege nachzuweisen, daß sie die bekannten Axiome des Euklid, die sich auf Ebene und Gerade beziehen, zur Folge haben.

Diesen, wie gesagt, außerordentlich mühseligen Weg, können wir hier nicht völlig ausgehen. Wir wollen jedoch kurz einige damit in Zusammenhang stehende Bemerkungen mitteilen, welche insbesondere zeigen sollen, wie die genannten Operationen direkt in logische Zeichensprache umgesetzt werden können, in der man rechnen kann[1]. Wir müssen dabei einige einfache Begriffe aus der sog. mathematischen Logik, wie sie E. Schröder[2] aufgestellt hat, voraussetzen. Für die Bedeutung der Zeichen $<$ und $=$ dürfen wir uns dabei auf Kap. II, § 2 berufen, wie auch für die „logische Multiplikation".

Seien also drei „Stücke" von starren Körpern gegeben, $a$, $b$, $c$, welche in der in Kap. I, § 5 geschilderten Weise gegeneinander abgeschliffen wurden, so daß jetzt alle drei je eine Fläche aufweisen, derart, daß diese paarweise immer genau aufeinanderpassen.

Haben also zwei Stücke $a$ und $b$ je eine solche Fläche, dann wollen wir diese Relation zwischen $a$ und $b$ (s. Kap. II, § 2) schreiben als:

$$a \backsim b$$

Diese Relation, welche wir als die der „Adhäsion" bezeichnen können (so daß die Stücke $a$ und $b$ als „zueinander adhärent" zu bezeichnen wären), gehorcht, wie man unmittelbar einsieht, dem Gesetze:

1) $$(a \backsim b) < (b \backsim a).$$

Wir definieren dann durch die Adhäsion eine neue Relation zwischen zwei Stücken, wie folgt:

2) $$(a \backsim c)\,(b \backsim c) = (a \cong b).$$

Diese Relation wollen wir als „Kongruenz" bezeichnen, und es ist leicht zu sehen, was ihr in der Wirklichkeit entspricht. Man kann dann ohne Schwierigkeit die Relationsgesetze der Kongruenz aus ihrer Definition ableiten. Da nämlich nach einfachen Gesetzen des Logikkalkuls:

---

[1] Siehe d. Verf. „Grundlinien", Kap. I, § 4.

[2] „Vorlesungen über die Algebra der Logik". I. Leipzig 1890. Ein Werk, das jeden Mathematiker, der auf Bd. I, p. 168 zu lesen beginnt, sofort aufs lebhafteste fesseln muß.

$$(a \backsim c)\ (b \backsim c) = (b \backsim c)\ (a \backsim c)$$

so folgt nach 2):

3) $$(a \backcong b) = (b \backcong a).$$

Ferner ebenso:

$$(a \backsim c)\ (b \backsim c)\ (b \backsim c)\ (d \backsim c) < (a \backsim c)\ (d \backsim c)$$

oder:

4) $$(a \backcong b)\ (b \backcong d) < (a \backcong d)$$

Setzen wir in 4) $d = a$, so folgt:

5) $$(a \backcong b) < (a \backcong a)$$

d. h. $(a \backcong a)$ hat einen vernünftigen Sinn.

Endlich definieren wir mit Hilfe der beiden vorangegangenen Relationen der Adhäsion und der Kongruenz eine dritte, die „Ebenheit". Wir setzen:

6) $$(a \backsim b)\ (a \backcong b) = (a \sqcup b).$$

Wir wollen die Relationsgesetze der Ebenheit ableiten. Zunächst folgt wegen 1) und 3):

7) $$(a \sqcup b) = (b \sqcup a).$$

Um eine weitere Eigenschaft zu zeigen, beweisen wir den Satz:

8) $$(a \backcong b)\ (a \backsim c) < (b \backsim c).$$

Dieser ergibt sich unmittelbar aus Definition 2). Wir dürfen schreiben (was auch immer $c$ sei):

$$(a \backsim c)\ (b \backsim c) = (a \backcong b)$$

oder:

$$(a \backcong b)\ (a \backsim c) = (a \backsim c)\ (b \backsim c),$$

woraus:

$$(a \backcong b)\ (a \backsim c) < (b \backsim c).$$

Jetzt ergibt sich:

$$(a \sqcup c)\ (b \sqcup c) = (a \backsim c)\ (a \backcong c)\ (b \backsim c)\ (b \backcong c)$$
$$< (a \backsim c)\ (b \backsim c)\ (b \backsim c)\ (a \backcong c) = (a \backcong b)\ (a \backcong c)\ (c \backsim b)$$

aber nach 8)

$$< (a \backcong b)\ (a \backsim b) = (a \sqcup b).$$

Es ergibt sich das Relationsgesetz:

9) $$(a \sqcup c)\ (b \sqcup c) < (a \sqcup b).$$

Setzen wir hier $b = a$, so folgt:

$$(a \sqcup c) < (a \sqcup a).$$

Da aber wegen 6) $(a \sqcup a) = (a \backsim a)\,(a \cong a)$, also:

$$(a \sqcup a) < (a \backsim a),$$

so ergibt sich, da $(a \cong a)$ für jeden Körper gilt, daß die charakteristische Eigenschaft der Ebenheit ist, daß ein ebenes Stück zu sich selbst oder einem kongruenten adhärent ist.

Nun ergibt sich sofort, daß unsere drei Stücke $a$, $b$, $c$, von denen wir eingangs sprachen, in dem hier (Nr. 6) definierten Sinne ebene Stücke sind. Wir setzten voraus:

$$(a \backsim b)\;(b \backsim c)\;(c \backsim a),$$

daraus aber folgt:

$$<(a \backsim b)\,(a \cong b) \text{ oder } (b \backsim c)\,(b \cong c) \text{ oder } (c \backsim a)\,(c \cong a)$$

und dies bedeutet:

$$(a \quad b),\; (b \sqcup c),\; (c \sqcup a).$$

# Anhang II.

Bem. zu Seite 141. Wir müssen noch auf einen Umstand hinweisen. Man könnte nämlich hier folgendes einwerfen: Es ist zuzugeben, daß auf dem bezeichneten Wege es gelingt, einige Kontrollen zu erfüllen. Man muß aber da einen Unterschied machen zwischen unabhängigen und abhängigen Kontrollen, wie wir sie etwa nennen können. Denken wir uns auf unserem Wege alle möglichen unabhängigen Kontrollen für ein gewisses Raumstück erfüllt, d. h. natürlich innerhalb der momentanen Genauigkeitsgrenze. Ist das geschehen, dann sind eben weitere Kontrollen nicht mehr auf unserem Wege unabhängig erfüllbar. Diese nicht mehr unabhängig erfüllbaren Kontrollen sind die sog. abhängigen, es sind diejenigen, welche sich logisch aus den bereits erfüllten ableiten lassen. Wir können also den Einwurf jetzt kurz so aussprechen: Die Möglichkeit, eine Gruppe von unabhängigen Kontrollen auf unsere Weise zur Erfüllung zu bringen ist ohne weiteres zugegeben. Woraus weiß ich aber dann das Erfüllltsein der abhängigen Kontrollen, deren

Erfülltsein ich auf dem genannten Wege nicht mehr erzwingen kann?[1]

Dieser Einwurf erledigt sich am kürzesten, wenn wir auf die Ausführungen des § 3 dieses Kapitels (besonders p. 127) hinweisen. Sind nämlich die abhängigen Kontrollen nicht erfüllt, dann können auch die unabhängigen nicht sämtlich erfüllt sein.

Jede solche „abhängige Kontrolle" muß nämlich an irgendeiner „Figur" konstatiert werden. Und wenn für diese Figur ihr apriorisches Gesetz nicht erfüllt ist, dann können auch für mindestens einige ihrer Elementarfiguren deren apriorische Gesetze nicht erfüllt sein, bei diesen gilt das gleiche, und so kommen wir, wie schon früher dargelegt zu dem Schlusse, daß dann auch einige der unabhängigen Kontrollen nicht ihrem apriorischen Gesetze gehorchen, gegen die Voraussetzung.

Es sind dies immer wieder die gleichen Gedankengänge, die hier zur Anwendung kommen, wie wir sie im 2. Kapitel entwickelten. Ebenso wie die fortwährende Anwendung der Vorschrift, daß, wenn bei der in § 5, Kap. III, geschilderten Herstellung der Zuordnung, eine Kontrolle nicht stimmt, dies durch eine Korrektur des starren Körpers beseitigt wird, genau das gleiche Verfahren ist, das wir in Kapitel II, besonders § 8, fortgesetzt anwandten. Man möge also darin hier nichts Merkwürdigeres finden als dort.

[1] Um ohne lange Erörterungen vielleicht verständlicher zu sein, wählen wir ein Beispiel. Ich kann bei einem Dreieck durch die Konstruktion bewirken, daß alle drei Seiten gleich sind. Das ist dann unsere unabhängige Bedingung. Ist das geschehen, so kann ich nicht mehr ebenso bewirken, daß auch die drei Winkel gleich sind, denn das ist dann eine sog. abhängige Bedingung. Diese muß sich logisch aus den unabhängigen ableiten lassen.